

Correction des exercices de révisions bac n°7 : équations différentielles, fonctions trigonométriques

Exercice 1 (12 pts) 1. (2 pts) (E) : $10y' + y = 30 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{10}y + 3$.

Les solutions de l'équation(E) sont de la forme

$$f: t \mapsto Ke^{-\frac{t}{10}} - \frac{3}{-\frac{1}{10}} = Ke^{-\frac{t}{10}} + 30$$

(1 pt) Or $v(0) = 0 \Leftrightarrow K + 30 = 0 \Leftrightarrow K = -30$

$$\text{Donc } v(t) = -30e^{-\frac{t}{10}} + 30 = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$$

2. a. (2 pts) On dérive v : pour $t \geq 0$, $v'(t) = 30 \times -\left(-\frac{1}{10}\right) \times e^{-\frac{t}{10}} = 3e^{-\frac{t}{10}}$

Donc $v'(t)$ est positif pour tout t et v est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. b. (2 pts) Par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 30$

3. a. (2 pts) On utilise un tableau de valeurs de v' avec un pas de 0,1 pour trouver que la vitesse se stabilise à partir d'environ 34 secondes.

3. b. (3 pts)

$$v'(t) < 0,1 \Leftrightarrow 3e^{-\frac{t}{10}} < 0,1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10}} < \frac{1}{30} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right) \Leftrightarrow -\frac{t}{10} < -\ln(30) \Leftrightarrow t > 10 \times \ln(30)$$

Donc la valeur exacte du nombre recherché est $10 \times \ln(30)$

Exercice 2 (4 pts) 1. (2 pts) Essayons de calculer le membre de gauche : $f_0'(x) + f_0(x)$. Pour tout x réel :

$$f_0'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}.$$

$$\text{Ainsi, } f_0'(x) + f_0(x) = (-x^2 - x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3 + x^2 + 3x)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}.$$

On retrouve bien le membre de droite. Donc la fonction f_0 est bien une solution de (E) : $y' + y = (2x + 3)e^{-x}$.

2. (1 pt) (E₀): $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$.

Les solutions de cette équation homogène sont de la forme $f(x) = Ke^{-x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

3. (1 pt) f_0 étant une solution particulière, les solutions de (E) sont de la forme $Ke^{-x} + f_0(x)$, soit :

$$Ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} = (x^2 + 3x + K)e^{-x} \text{ où } K \text{ est un réel.}$$

Exercice 3 (12 pts)

1a. (2 pts) On dérive f comme un produit.

$$\text{Pour tout } x \in [0; \pi], f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

1b. (2 pts) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont positives sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $(\sin(x) + \cos(x))$ est également positif sur cet intervalle, et donc $f'(x)$ l'est aussi.

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2a. (2 pts) On calcule $f(0) = e^0 \sin(0) = 0$ et $f'(0) = e^0(\sin(0) + \cos(0)) = 1(0 + 1) = 1$.

Donc la tangente T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1x + 0 = x$.

2b. (2 pts) On dérive à nouveau f' .

$$f''(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x)) = e^x(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x)) = 2e^x \cos(x)$$

Or, à nouveau, la fonction $\cos$ est positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $f''(x)$ est positif, ainsi f est convexe sur cet intervalle.

2c. (2 pts) f étant convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe est au-dessus de sa tangente T , donc $f(x) \geq x$.

D'où $e^x \sin(x) \geq x$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2d. (2 pts) En $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\cos$ s'annule et change de signe. Donc $f''(x)$ également.

f change donc de convexité. Donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

Exercice 4

Affirmation 1

Supposons qu'une telle fonction constante f existe. On a tout, pour tout réel x , $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$. De plus, d'après (E), $f'(x) = \frac{3}{2}f(x) + 2 \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}k + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$

Ainsi, la fonction constante $f(x) = -\frac{4}{3}$ est bien solution de l'équation (E). L'affirmation est vraie.

Affirmation 2

Les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = Ke^{\frac{3}{2}x} - \frac{2}{\frac{3}{2}} = Ke^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$

En utilisant la condition initiale $f(0) = 0$, on obtient $Ke^{\frac{3}{2} \times 0} - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow K - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{4}{3}$

Donc $f(x) = \frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$

On a alors $f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} = 2e^{\frac{3}{2}x}$ et le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ est donc $f'(1) = 2e^{\frac{3}{2} \times 1} = 2e^{\frac{3}{2}}$. L'affirmation est vraie.

Exercice 5 (20 pts)

Partie A

1. (3 pts) On a $f(0) = 220$, soit $ae^{-\frac{0}{2}} + b = a + b = 220$.

De plus, $f'(t) = -\frac{a}{2}e^{-\frac{t}{2}}$. Or :

$$\begin{aligned}f'(t) + \frac{1}{2}f(t) &= 10 \\ \Leftrightarrow -\frac{a}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}(ae^{-\frac{t}{2}} + b) &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}b &= 10 \\ \Leftrightarrow b &= 20\end{aligned}$$

Et de $a + b = 220$, on déduit $a = 200$.

2a. (2 pts) Pour tout t positif :

$$f'(t) = -\frac{200}{2}e^{-\frac{t}{2}} = -100e^{-\frac{t}{2}}$$

Cette dérivée étant négative, f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2b. (2 pts) On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ et $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 20$.

3a. (1 pt) On situe ce moment à 3 h 48 mn environ.

3b. (3 pts) On résout une équation :

$$f(t) = 50 \Leftrightarrow 200e^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50 \Leftrightarrow 200e^{-\frac{t}{2}} = 30 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right) \Leftrightarrow t = -2 \ln\left(\frac{3}{20}\right) \approx 3,79$$

Partie B

1a. (3 pts) $d_0 = f(0) - f(1) \approx 78,7$, $d_1 = f(1) - f(2) \approx 47,7$ et $d_2 = f(2) - f(3) \approx 29,0$.

1b. (4 pts) Pour tout n entier,

$$d_n = \left(200e^{-\frac{n}{2}} + 20\right) - \left(200e^{-\frac{n+1}{2}} + 20\right) = 200(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}) = 200(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}}) = 200e^{-\frac{n}{2}}(1 - e^{-\frac{1}{2}})$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n}{2}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

2. (2 pts) Par des calculs successifs, on trouve $n = 6$.

Exercice 6 (16 pts)

1. Cette première question est difficile, mais il est possible de la passer.

• (2 pts) Supposons que f est solution de l'équation (E), c'est-à-dire que $f' = -\frac{1}{20}f(3 - \ln(f))$

Soit $g = \ln(f)$. Montrons que g est solution de l'équation (E_0). On dérive g :

$$g' = \frac{f'}{f} = \frac{-\frac{1}{20}f(3 - \ln(f))}{f} = -\frac{1}{20}(3 - \ln(f)) = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}\ln(f) = \frac{1}{20}g - \frac{3}{20}$$

On a bien montré que g était solution de l'équation (E_0).

• (2 pts) Supposons que g est solution de l'équation (E_0), c'est-à-dire que $g' = \frac{1}{20}g - \frac{3}{20}$

Montrons que f est solution de l'équation (E).

On remarque d'abord que si $g = \ln(f)$, alors $f = e^g$ et donc on peut calculer f' :

$$f' = g'e^g = \left(\frac{1}{20}g - \frac{3}{20}\right)e^g = \left(\frac{1}{20}\ln(f) - \frac{3}{20}\right)f = -\frac{1}{20}f(3 - \ln(f))$$

On a bien montré que f était solution de l'équation (E).

2a. (2 pts) Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$g(t) = C e^{\frac{1}{20}t} - \frac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = C e^{\frac{t}{20}} + 3, C \in \mathbb{R}$$

2b. (2 pts) Si g est solution de (E_0), alors $f = e^g$ est solution de (E). On a alors pour tout $t \in [0; +\infty[$

$$f(t) = \exp\left(C e^{\frac{t}{20}} + 3\right) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right), C \in \mathbb{R}$$

2c. (2 pts) D'après le début de l'énoncé, $f(0) = 1$ (soit un millier). Ainsi :

$$\exp\left(3 + C \exp\left(\frac{0}{20}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \exp(3 + C) = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$$

3a. (2 pts) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{t}{20}\right) = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$.

Or $\lim_{T \rightarrow -\infty} \exp(T) = 0$ donc par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) = 0$

3b. (4 pts) f est de la forme e^u où $u(t) = 3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)$ et ainsi $u'(t) = -\frac{3}{20} \exp\left(\frac{t}{20}\right)$

Ainsi, $f(t) = -\frac{3}{20} \exp\left(\frac{t}{20}\right) \times \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

Les exponentielles sont positives, donc le signe de $f(t)$ est celui de $-\frac{3}{20}$ qui est négatif.

f est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.

3c. (4 pts) $f(t) < 0,02$

$$\Leftrightarrow \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0,02$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0,02)$$

$$\Leftrightarrow -3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0,02) - 3$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{\ln(0,02) - 3}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{\ln(0,02) - 3}{-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > 20 \ln\left(\frac{\ln(0,02) - 3}{-3}\right)$$

Le membre de droite vaut environ 16,69. Ainsi, c'est au bout de 17 années que la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Exercice 7 (20 pts)

1. (2 pt) Si f est une fonction constante solution de (E_0) , on a $f' = 0$, or $f' = f$, donc $f = 0$.

2. (2 pts) Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $f(x) = C e^x$ où C est un réel.

3. (3 pts) Pour x réel, on a $h'(x) = -2 \sin(x) + \cos(x)$.

Or $h(x) = \cos(x) - 3 \sin(x) = 2 \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3 \sin(x) = \cos(x) - 2 \sin(x) = h'(x)$.

Donc h est solution de (E) .

4. (4 pts) C'est un résultat qui est dans le cours : les solutions de (E) sont de la forme $u + h$, où u est solution de (E_0) et h une solution particulière de (E) . Ici, on nous demande de le redémontrer.

• Si f est solution de (E) , alors : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3 \sin(x)$.

Il faut maintenant montrer que $f - h$ est solution de (E_0) , c'est-à-dire que $(f - h)' = f' - h' = f - h$. Or :

$$f'(x) - h'(x) = (f(x) - \cos(x) - 3 \sin(x)) - (\cos(x) - 2 \sin(x)) = f(x) - 2 \cos(x) - \sin(x) = f(x) - h(x).$$

Ainsi, $f - h$ est solution de (E_0) .

• Si $f - h$ est solution de (E_0) , alors $(f - h)' = f' - h' = f - h$, c'est-à-dire que $f' = f - h + h'$.

On a alors $f'(x) = f(x) - 2 \cos(x) - \sin(x) + \cos(x) - 2 \sin(x) = f(x) - \cos(x) - 3 \sin(x)$.

f est alors bien solution de (E) .

5. (3 pts) Les solutions f de (E) vérifie que $f - h$ est solution de (E_0) , c'est-à-dire que pour tout x réel,

$f(x) - h(x) = C e^x$ où C est un réel d'après la question 2,

soit $f(x) = C e^x + h(x) = C e^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$.

6. (2 pts) Si $g(0) = 0$, on a $C e^0 + 2 \cos(0) + \sin(0) = 0 \Leftrightarrow C + 2 = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Ainsi, $g(x) = -2e^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$.

7. (4 pts) On se rassure en remarquant que c'est bien la fonction trouvée précédemment.

La question a l'air compliquée, mais c'est l'intégrale d'une somme : on peut la diviser en 3 intégrales.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + \sin(x) + 2\cos(x) dx = [-2e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2e^{\frac{\pi}{2}} - (-2e^0) - (-\cos(0)) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 5$$

Exercice 8 (20 pts)

Partie A (12 pts) 1. (3 pts) On sait que pour tout x réel, $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

En additionnant ces deux égalités :

$$-2 \leq -\cos(x) + \sin(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\cos(x) + \sin(x) + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \times e^{-x} \leq (-\cos(x) + \sin(x) + 1)e^{-x} \leq 3 \times e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$$

2. (2 pts) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc f est encadrée entre deux fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$.

D'après le théorème des gendarmes, sa limite en $+\infty$ est 0.

3. (3 pts) Soit x réel. f est un produit, que l'on dérive en posant :

$$u(x) = e^{-x} \text{ donc } u'(x) = -e^{-x}$$

$$v(x) = -\cos(x) + \sin(x) + 1 \text{ donc } v'(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = -e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1) + e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) = e^{-x}(2 \cos(x) - 1)$$

4a. (3 pts) Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $2 \cos(x) - 1$. On doit résoudre une inéquation :

$$2 \cos(x) - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2}$$

On peut dessiner un cercle trigonométrique pour s'aider.

Les mesures d'angles de $[-\pi; \pi]$ qui sont solution de cette inéquation sont celles de l'intervalle $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ et négatif sur $[-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$

4b. (1 pt) f est décroissante sur $[-\pi; -\frac{\pi}{3}]$, puis croissante sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ et enfin décroissante sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$

Suite de la correction de l'exercice 8

Partie B (8 pts)

1. (2 pts) Pour x réel :

$$f(x) - g(x) = e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1) - (-e^{-x}\cos(x)) = e^{-x}(\sin(x) + 1)$$

Le signe ne dépend que de $(\sin(x) + 1)$. Or pour tout x réel, $\sin(x) \geq -1$ donc $\sin(x) + 1$ est positif.

Ainsi, C_f est au-dessus de C_g sur $\mathbb{R}$.

2. (2 pts) Pour x réel, on pose :

$$u(x) = -\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 \quad u'(x) = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$v(x) = e^{-x} \quad v'(x) = -e^{-x}$$

On calcule ensuite :

$$H'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right)e^{-x} + \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right) \times (-e^{-x})$$

$$H'(x) = e^{-x} \left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)}{2} + 1\right)$$

$$H'(x) = (\sin x + 1)e^{-x}$$

3. (1 pt) Il s'agit de calculer :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)e^{-x} dx = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(2 \text{ pts}) \text{ Or } H\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\cos(\frac{3\pi}{2})}{2} - \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{2} - 1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}} = \left(-\frac{-1}{2} - 1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

$$\text{et } H\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{2} - \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{2} - 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{(-1)}{2} - 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi, l'aire demandée est de $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ unités d'aire.

(1 pt) Comme une unité de longueur mesure deux centimètres, une unité d'aire est 4 cm^2 .

L'aire du domaine D est $4 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ soit environ $9,60 \text{ cm}^2$.