

Révisions bac n°7 : équations différentielles, fonctions trigonométriques

Exercice 1 (3 pts)

Un cycliste roule sur une route descendante, rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse (en $m.s^{-1}$) à l'instant t (en s).

On suppose que la fonction v ainsi définie est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que v est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $10y' + y = 30$.

Enfin, on suppose que le cycliste s'élance avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que :

$$v(t) = 30(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

2. a. Déterminer les variations de v sur $[0; +\infty[$

b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. Dans cette question, on considère que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 m.s^{-2}$.

a. A la calculatrice, déterminer à la seconde près la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

b. En résolvant une inéquation, retrouver la valeur exacte du nombre trouvé en question précédente.

Exercice 2 (1 pt)

On considère (E) l'équation différentielle $y' + y = (2x + 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' + y = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 3 (3 pts)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$, $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

d. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

Exercice 4 (2 pts)

On considère l'équation différentielle (E): $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera la réponse.

Affirmation 1 : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.

Affirmation 2 : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 5 (5 pts)

Partie A La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t . f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10$$

La température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t en heures.

1. On admet qu'il existe deux nombres a et b tels que :

$$f(t) = ae^{-\frac{t}{2}} + b$$

Déterminer a et b sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220°C .

2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
 - b. Étudier la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. a. Donner une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50°C .
- b. Retrouver ce résultat par le calcul.

Partie B On considère la suite de terme général $d_n = f(n) - f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$.

d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1. a. Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0 , d_1 et d_2 .
 - b. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?
2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5°C .

Exercice 6 (4 pts) Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. Durant l'année 2000, une étude a été réalisée sur un échantillon de cette population, dont l'effectif initial s'élevait à 1 000.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en millier d'individus, est approchée par une fonction f du temps t (exprimé en année à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E): y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln(y))$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : « une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E_0): y' = \frac{1}{20}y - \frac{3}{20}$$

2. a. Donner la solution générale de l'équation (E_0) .
- b. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

c. En déduire la valeur de C .

3. Pour la suite, on admet que la fonction f est définie par

$$f(t) = \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

- a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
- c. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Exercice 7 (5 pts)

On considère l'équation différentielle $(E_0) : y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + \sin(x) + 2\cos(x) \, dx$$

Exercice 8 (5 pts)

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-contre sur un T-shirt.

Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x}\cos(x)$$

Partie A

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} : -e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$
3. Montrer que pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}(2 \cos(x) - 1)$
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$, pour $x \in [-\pi; \pi]$
 - b. En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

L'unité graphique est de 2 centimètres.

1. Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 \right) e^{-x}$$

Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

3. On note D le domaine délimité par la courbe C_f , la courbe C_g et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

