Correction des exercices de révisions bac n°6 : Intégrales

Exercice 1 (16 pts)

Partie A

1. (2 pts) On dérive f comme un produit et on factorise par $e^{-0,6x}$.

Pour tout $x \in [0\,;4]$:

$$f'(x) = 3{,}6e^{-0,6x} + (3{,}6x + 2{,}4) \times (-0{,}6)e^{-0,6x} = e^{-0,6x}(3{,}6 - 2{,}16x - 1{,}44) = e^{-0,6x}(-2{,}16x + 2{,}16)$$

2a. (2 pts) L'exponentielle étant positive, le signe ne dépend que de $(-2{,}16x + 2{,}16)$, qui s'annule pour $x = 1$. Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $[0\,;1]$ puis négatif sur $[1\,;4]$.

2b. (2 pts) f est donc croissante sur $[0\,;1]$ puis décroissante sur $[1\,;4]$.

On a $f(0) = (3{,}6 \times 0 + 2{,}4)e^{-0,6\times 0} - 1{,}4 = 2{,}4 - 1{,}4 = 1$

$f(1) = (3{,}6 \times 1 + 2{,}4)e^{-0,6\times 1} - 1{,}4 = 6e^{-0,6} - 1{,}4 \approx 1{,}89$,

et enfin $f(4) = (3{,}6 \times 4 + 2{,}4)e^{-0,6\times 4} - 1{,}4 = 6e^{-2,4} - 1{,}4 \approx 0{,}12$

3a. (2 pts) On dérive aussi F comme un produit en factorisant par $e^{-0,6x}$.

Pour tout $x \in [0\,;4]$:

$$F'(x) = -6e^{-0,6x} + (-6x - 14) \times (-0{,}6)e^{-0,6x} - 1{,}4 = e^{-0,6x}(-6 + 3{,}6x + 8{,}4) - 1{,}4 = (3{,}6x + 2{,}4)e^{-0,6x} - 1{,}4$$

3b. (3 pts) $\int_0^4 f(x)dx = F(4) - F(0)$

$= \left((-6 \times 4 - 14)e^{-0,6\times 4} - 1{,}4 \times 4\right) — 6 \times 0 - 14e^{-0,6\times 0} - 1{,}4 \times 0$

$= (-38e^{-2,4} - 5{,}6) - (-14)$

$= -38e^{-2,4} + 8{,}4$

$\approx 4{,}95$

Partie B *On veut vous faire calculer l'aire d'un cœur* ♥

1. (3 pts)

$$\int_0^{0,5} g(x)dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 1x\right]_0^{0,5} = \left[\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_0^{0,5}$$

$$= \left(\frac{4 \times 0{,}5^3}{3} - 2 \times 0{,}5^2 + 0{,}5\right) - \left(\frac{4 \times 0^3}{3} - 2 \times 0 + 0\right)$$

$$= \left(\frac{4 \times 0{,}125}{3} - 2 \times 0{,}25 + 0{,}5\right)$$

$$= \frac{0{,}5}{3} = \frac{1}{6}$$

2. (2 pts) Calculons l'aire de la partie au-dessus de l'axe des abscisses (on multipliera le résultat par 2 par symétrie).

Soit A l'aire de cette partie supérieure. On a :

$$A = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^{0,5} g(x)dx \approx 4{,}95 - 0{,}17 \approx 4{,}78$$

Ainsi, l'aire demandée est d'environ $4{,}78 \times 2 \approx 9{,}56$ unités d'aire.

Exercice 2 (12 pts) 1. (2 pts)

$$f(ln\ 5) = \frac{6}{1 + 5e^{-\ln 5}} = \frac{6}{1 + 5 \times \frac{1}{e^{\ln 5}}} = \frac{6}{1 + 5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{1+1} = 3$$

donc le point $A(\ln 5\,; 3)$ appartient bien à la courbe.

2. (2 pts) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 5e^{-x} = 1$, et ainsi par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{6}{1} = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3a. (2 pts) On dérive f comme une fonction de la forme $6 \times \frac{1}{v}$, dont la dérivée est $6 \times \frac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = 6 \times \frac{-5 \times (-e^{-x})}{(1 + 5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

3b. (2 pts) L'exponentielle et le carré étant positifs pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est positif et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On dresse le tableau de variations complet, donc il faut également calculer la limite en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + 5e^{-x} = +\infty$, et ainsi par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$.

Suite de la correction de l'exercice 2

4a. (2 pts) Nous devons dériver F_k en essayant de trouver la valeur de k, pour que $F_k'(x) = f(x)$.

Comme on trouve du e^x au numérateur, on essaie de simplifier la fraction obtenue par e^x.

$$F_k'(x) = k \times \frac{e^x}{e^x + 5} = k \times \frac{e^x \times 1}{e^x\left(1 + \frac{5}{e^x}\right)} = k \times \frac{1}{1 + \frac{5}{e^x}} = \frac{k}{1 + 5e^{-x}}$$

En prenant $k = 6$, on retrouve bien $f(x)$.

4b. (2 pts) On calcule l'intégrale, grâce à la primitive F_6trouvée en **4a** :

$$\int_0^{\ln 5} f(x) = [F_6(x)]_0^{\ln 5} = 6\ln\left(e^{\ln 5} + 5\right) - 6\ln(e^0 + 5) = 6\ln(10) - 6\ln(6) = 6(\ln 10 - \ln 6) = 6\ln\left(\frac{10}{6}\right) = 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

Exercice 3

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$.

On a alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$. On réalise une IPP :

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

$$= [-e^{-x} \times x]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 1\,dx$$

$$= -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1$

$= -e^{-1} + \left(-e^{-1} - (-e^{-0})\right)$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$

$= 1 - 2e^{-1}$ et l'affirmation est vraie.

Exercice 4 (12 pts)

1. (2 pts) $I_0 = \int_{-2}^0 x^0 e^{-x}\,dx = \int_{-2}^0 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{-2}^0 = -e^{-0} — e^{-2} = -1 — e^2 = e^2 - 1$

2. (3 pts) $I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1}e^{-x}\,dx$

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. On a alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$. On réalise une IPP :

$$I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1}e^{-x}\,dx$$

$$= [-e^{-x}x^{n+1}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 -e^{-x} \times (n+1)x^n\,dx$$

$$= \left(-e^{-0} \times 0^{n+1} - \left(-e^{-(-2)} \times (-2)^{n+1}\right)\right) + \int_{-2}^0 (n+1)x^n e^{-x}\,dx$$

$$= e^2(-2)^{n+1} + (n+1)\int_{-2}^0 x^n e^{-x}\,dx$$

$= (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$

3. (2 pts) En appliquant la formule,

$I_1 = I_{0+1} = (-2)^{0+1}e^2 + (0+1)I_0 = -2e^2 + I_0 = -2e^2 + e^2 - 1 = -e^2 - 1$

$I_2 = I_{1+1} = (-2)^{1+1}e^2 + (1+1)I_1 = 4e^2 + 2I_1 = 4e^2 + 2(-e^2 - 1) = 2e^2 - 2$

4a. (2 pts) Le signe de f ne dépend que de $(x^2 - 4)$.

Or $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4$.

Donc f est positive sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty$ et négative sur $[-2; 2]$.

4b. (3 pts) La question revient à calculer l'opposé de l'intégrale de f sur l'intervalle $[-2; 0]$.

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (x^2 - 4)e^{-x}\,dx = \int_{-2}^0 x^2e^{-x} - 4e^{-x}\,dx = \int_{-2}^0 x^2e^{-x}dx - \int_{-2}^0 4e^{-x}dx = I_2 - 4I_0$$

Or $I_2 - 4I_0 = 2e^2 - 2 - 4(e^2 - 1) = -2e^2 + 2$

Donc l'aire du domaine D est $S = -(-2e^2 + 2) = 2e^2 - 2$ *(bizarrement, on retrouve I_2).*

Exercice 5 **(12 pts)**

1. (2 pts) $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)=+\infty$ par somme et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Par produit, c'est une forme indéterminée.
Mais $f(x)=x^2e^{-x}+3xe^{-x}+2e^{-x}$.
Et $\lim_{x\to+\infty} x^{2e^{-x}}=0$ par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ également par croissances comparées, et $\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x}=0$. Donc par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2a. (2 pts) On dérive f comme un produit.

$$f'(x)=(2x+3)e^{-x}+(x^2+3x+2)\times(-e^{-x})=e^{-x}(2x+3-x^2-3x-2)=e^{-x}(-x^2-x+1)$$

2b. (3 pts) Le polynôme $(-x^2-x+1)$ a pour discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times(-1)\times 1=5$. Ses racines sont donc :

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad ;\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$f'(x)$ est donc négatif sur $]-\infty\,;x_2]\cup[x_1\,;+\infty[$ et positif sur $[x_2\,;x_1]$.
f est donc décroissante sur $]-\infty\,;x_2]$, puis croissante sur $[x_2\,;x_1]$ et enfin décroissante sur $[x_1\,;+\infty[$.

3. (3 pts) Le signe de $f(x)$ ne dépend que de (x^2+3x+2), dont le discriminant est $\Delta=3^2-4\times1\times2=1$.
Ses racines sont donc :

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{1}}{2\times1}=-2\quad ;\quad x_2=\frac{-3+\sqrt{1}}{2\times1}=-1$$

$f(x)$ est donc positif sur $]-\infty\,;-2]\cup[-1\,;+\infty[$ et négatif sur $[-2\,;-1]$.
La fonction f est donc positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. (2 pts) f étant positive, l'aire demandée correspond donc à l'intégrale :

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=[F(x)]_0^\alpha=F(\alpha)-F(0)$$
$$=(-\alpha^2-5\alpha-7)e^{-\alpha}-(-0^2-5\times0-7)e^{-0}$$
$$=(-\alpha^2-5\alpha-7)e^{-\alpha}+7$$

Exercice 6 **(24 pts)**

Partie A (12 pts)

1a. (1 pt) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, et $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, donc par composition, $\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Ainsi, par produit, $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$.

1b. (1 pt) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc par composition, $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$. Ainsi, par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

1c. (2 pt) On peut en déduire que C admet deux asymptotes : l'une verticale, d'équation $x=0$,
et l'autre horizontale, d'équation $y=0$.

2a. (2 pts) On dérive f comme un produit (attention à $e^{\frac{1}{x}}$ qui est une fonction composée). Pour tout $x>0$:

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-2x-1}{x^4}\right)=-\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

2b. (2 pts) Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $(2x+1)$, qui est positif pour tout $x>0$. Mais attention à ne pas oublier le signe $-$. Ainsi, $f'(x)$ est négatif pour tout $x>0$ et f est décroissante. On pense à indiquer les limites dans le tableau de variations.

2c. (4 pts) On applique le TVI sur $]0;+\infty[$ en rédigeant bien, et en pensant à mentionner la continuité, la stricte décroissance et le fait que 2 soit compris entre les deux limites. $\alpha\approx 1{,}11$.

Partie B (12 pts) 1. (2 pts)

$$I_2=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$$

On reconnaît $f(x)$, mais ici il faut trouver une primitive et non une dérivée.
On remarque qu'il ne manque que le signe – pour que la fonction dans l'intégrale soit de la forme $u'e^u$, dont une primitive est de la forme e^u. Ainsi :

$$I_2=-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}dx=-\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2=-\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{1}}\right)=e-e^{\frac{1}{2}}=e-\sqrt{e}$$

Suite de la correction de l'exercice 6

2a. (3 pts) *Oh non !* On pourrait d'abord penser à faire une intégration par parties sur I_{n+1} :

$$I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx$$

On doit choisir ce qu'on va dériver entre $\frac{1}{x^{n+1}}$ et $e^{\frac{1}{x}}$, en gardant bien en tête qu'on veut retomber sur I_n.

• La dérivée de $\frac{1}{x^{n+1}}$ est $\frac{-(n+1)}{x^{n+2}}$ et on ne sait pas chercher une primitive de $e^{\frac{1}{x}}$: mauvais choix.

• On pense alors à dériver $e^{\frac{1}{x}}$, mais cela nous donnera $-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ qu'il faudra multiplier par $-\frac{1}{nx^n}$, la primitive de $\frac{1}{x^{n+1}}$. On trouvera alors x^{n+2} au dénominateur et non pas x^n. Cela ne nous ramènera pas à I_n.

Donc on laisse tomber I_{n+1}.

On va plutôt essayer d'appliquer l'intégration par parties sur I_n pour retomber sur I_{n+1}.

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

Posons $u'(x) = \frac{1}{x^n}$, on a alors $u(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ *(mais si, c'est dans votre tableau des primitives)*

Posons aussi $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$, on a $v'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. On réalise une intégration par parties :

$$I_n = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_n = \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_n = \left(\frac{1}{(1-n)2^{n-1}} e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(1-n)1^{n-1}} e^{\frac{1}{1}}\right) + \frac{1}{1-n} \int_1^2 \frac{1}{x^{n-1+2}} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_n = \frac{1}{1-n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - \frac{e}{1}\right) + \frac{1}{1-n} \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_n = \frac{1}{1-n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - \frac{e}{1}\right) + \frac{1}{1-n} I_{n+1}$$

On multiplie cette égalité par $(1-n)$:

$$(1-n)I_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - \frac{e}{1}\right) + I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

2b. (2 pts) *On utilise la formule de **2a** pour $n = 2$, même si on n'a pas réussi à la démontrer, ainsi que la question **1**.*

$$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - \left(e - \sqrt{e}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{2} + \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

3a. (2 pts) Pour $x \in [1;2]$, on sait déjà que $\frac{1}{x^n}$ et $e^{\frac{1}{x}}$ sont positifs, ce qui assure l'inégalité de gauche.

De plus, si $x \geq 1$, on a alors $\frac{1}{x} \leq 1$ et donc $e^{\frac{1}{x}} \leq e$.

En multipliant par $\frac{1}{x^n}$, on aboutit bien à l'inégalité de droite $\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

3b. (3 pts) On applique l'intégrale à tous les membres de cette inégalité :

$$\int_1^2 0\, dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx$$

Il reste à calculer le membre de droite :

$$\int_1^2 \frac{e}{x^n} dx = e \int_1^2 \frac{1}{x^n} dx = e\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = -\frac{e}{n-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2 = -\frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$$

Or quand n tend vers $+\infty$, $\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)$ tend vers 1 et $\frac{e}{n-1}$ tend vers 0. Par produit, le tout tend vers 0.

Ainsi, I_n est encadrée par 0, et une suite qui a pour limite 0. Par le théorème des gendarmes, sa limite est 0.

Exercice 7 (24 pts)

1. (2 pts)

$$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0x}\sin(x)\,dx = \int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

2a. (2 pts) Pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\sin(x)$ est positif, de même que l'exponentielle. Donc I_n est l'intégrale d'une fonction positive : elle est positive.

2b. (3 pts) On étudie un signe, il faut donc regrouper ces deux intégrales en une et essayer de factoriser.
Soit n entier naturel :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx - \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(x)\left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(x)e^{-nx}(e^{-x} - 1)\,dx$$

Or pour x positif, e^{-x} est inférieur à 1, donc $(e^{-x} - 1)$ est négatif.
On a déjà dit en **2a** que $\sin(x)$ et l'exponentielle sont positif pour $x \in [0\,;\pi]$, donc la fonction intégrée est négative.
Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

2c. (2 pts) On vient de montrer que la suite (I_n) est décroissante, et d'après **2a** elle est minorée par 0.
Elle est donc convergente.

3a. (2 pts) Pour tout $x \in [0\,;\pi]$ et tout entier naturel n, on sait que :

$$\sin(x) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow e^{-nx}\sin(x) \leq e^{-nx}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}dx$$

On a trouvé l'inégalité voulue.

3b. (2 pts) Une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est la fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{-n}$

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{e^{-n\times 0}}{-n} = \frac{e^{-n\pi}}{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

3c. (3 pts)

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\pi} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + e^{-n\pi} = 1$ et par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n\pi}}{n} = 0$.
Ainsi, d'après **2a** et **3a**, (I_n) est encadrée par 0 et par une suite qui tend vers 0.
D'après le théorème des gendarmes, la limite de (I_n) est 0.

4a. (4 pts)

• On pose $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = e^{-nx}$. On a alors $u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = -ne^{-nx}$.

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx$$

$$= [-\cos(x)\,e^{-nx}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\times(-n)e^{-nx}dx$$

$$= (-\cos(\pi)\,e^{-n\pi} - (-\cos(0))e^{-n\times 0}) - n\int_0^{\pi}\cos(x)\,e^{-nx}dx$$

$$= e^{-n\pi} + 1 - nJ_n$$

Suite de la correction de l'exercice 7

• On pose $u'(x) = e^{-nx}$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors $u(x) = \frac{e^{-nx}}{-n}$ et $v'(x) = \cos(x)$.

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(x)\,e^{-nx}}{-n}\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{-n\pi}}{-n}\sin(\pi) - \frac{e^{-0}}{-n}\sin(0)\right) + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(x)\,e^{-nx}dx$$

$$= \frac{1}{n}J_n$$

4b. (2 pts) On a deux égalités sur I_n, essayons de les regrouper.

$$1 + e^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n}J_n$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{-n\pi} = \frac{1}{n}J_n + nJ_n$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{-n\pi} = \frac{1+n^2}{n}J_n$$

$\Leftrightarrow 1 + e^{-n\pi} = (1+n^2)I_n$ (on réutilise le fait que $I_n = \frac{1}{n}J_n$)

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$$

5. (2 pts) Il manque juste `while I >= 0.1`