

Révisions bac n°6 : Intégrales

Les intégrales n'apparaissent souvent qu'en fin d'exercice. Ces exercices sont donc parfois des extraits de problèmes plus longs.

Exercice 1 (4 pts)

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à 0,01 près. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4$.

Partie A

- Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 4]$, on a $f'(x) = (-2,16x + 2,16)e^{-0,6x}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 4]$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle. On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations sous forme approchée.
- Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.
 - Calculer la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)dx$, puis en donner une valeur numérique approchée.

Partie B

On note C_f la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.

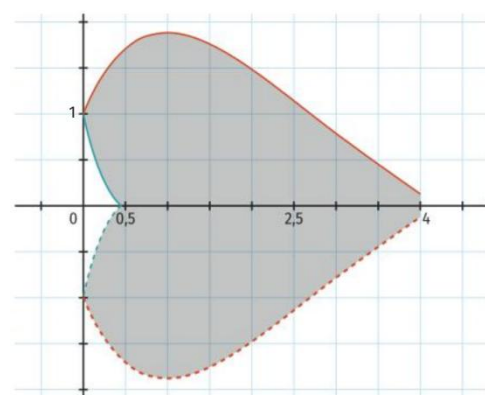
On considère la fonction g définie par $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

On note C_g la courbe représentative de cette g sur l'intervalle $[0; 0,5]$.

On a tracé ci-contre les courbes C_f et C_g dans un repère d'origine O , et en pointillée, les courbes obtenues par symétrie de C_f et C_g par rapport à l'axe des abscisses.

1. Montrer que $\int_0^{0,5} g(x)dx = \frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine du plan délimité par les courbes C_f , C_g , leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$. Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus. Calculer une valeur approchée de l'aire, en unité d'aire, de ce domaine.



Exercice 2 (3 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

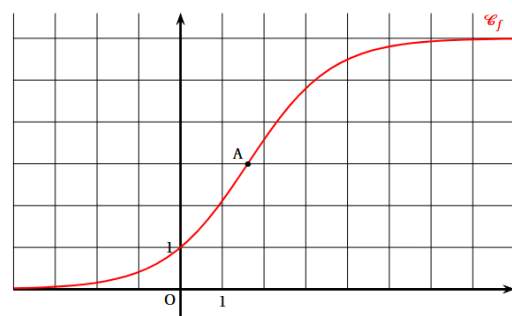
$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

On a représenté la courbe représentative C_f de la fonction f .

- Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5; 3)$ appartient à la courbe C_f .
- Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe C_f .
- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

- En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.
- Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6 \ln\left(\frac{5}{3}\right)$.



Exercice 3 (1 pt) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Votre réponse sera justifiée.

Affirmation : Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

Exercice 4 (3 pts)

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

1. Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.

2. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$$

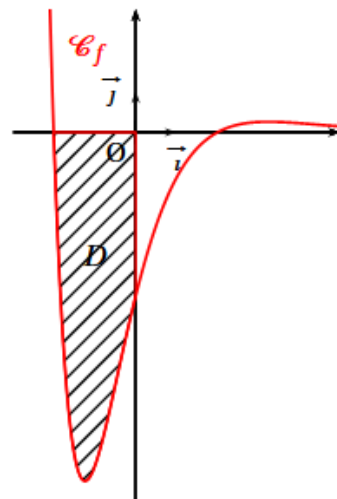
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2 .

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$.

a. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

b. On a représenté la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé. Soit D le domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D .



Exercice 5 (3 pts)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$

b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

Soit α un nombre réel positif. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 6 (6 pts)

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
 - c. Quelles conséquences pour la courbe C peut-on déduire de ces deux résultats ?
2.
 - a. Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel $x > 0$, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

- b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de α arrondie à 10^{-2} près.

Partie B : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

1. Calculer I_2 .
2.
 - a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n)I_n$$

- b. Calculer I_3 .
3.
 - a. Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1; 2]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .

Exercice 7 (6 pts)

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx \quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x) dx$$

1. Calculer I_0 .

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} dx$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-contre avec la commande appropriée.

```
from math import *
def seuil():
    n = 0
    I = 2
    ...
    n = n + 1
    I = (1 + exp(-n*pi)) / (n*n+1)
    return n
```