

Correction des exercices de révisions bac n°5 : Espace et orthogonalité

Exercice 1 (16 pts)

1. (2 pts) $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $M\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$.

2a. (3 pts) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 2 \times (-3) + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times 0 + 3 \times (-1) = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF) . C'est un vecteur normal au plan (HMF) .

2b. (2 pts) L'équation cartésienne du plan (HMF) est donc de la forme $2x + 6y + 3z + d = 0$.

H appartient à ce plan, donc on doit avoir $2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$ ce qui donne $d = -9$.

2c. (2 pts) Ce plan admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$, or ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Par exemple, $-3 \times (-1) = 3$ mais $5 \times (-1) \neq 2$. Ainsi, le plan P et le plan (HMF) sont sécants.

3. (2 pts) On utilise le point $D(0; 1; 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir $(DG): \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

4. (2 pts) N est censé appartenir à (HMF) et à (DG) . Dans ce cas, il existe t tel que :

$$2 \times 3t + 6 \times 1 + 3 \times t - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $N \left(1; 1; \frac{1}{3}\right)$.

5. (3 pts) On peut s'intéresser à la droite passant par G et dirigée par le vecteur $\vec{n}$ normal au plan, et vérifier si cette droite et ce plan se coupent bien en R . Je montre ici une méthode légèrement différente.

Le point R est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) si et seulement si :

- R appartient au plan (HMF) : c'est le cas car $2 \times 3 + 6 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 9 = 0$

- le vecteur $\overrightarrow{RG}$ est un vecteur normal au plan (HMF) : ce n'est pas le cas ici car $\overrightarrow{RG} \begin{pmatrix} 3-3 \\ 1-\frac{1}{4} \\ 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et ce

vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{n}$. Ainsi, le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) .

Exercice 2 (20 pts)

1a. (3 pts) On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

On calcule aussi celles du vecteur $\vec{FD} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{FD} \cdot \vec{IJ} = -\frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ et $\vec{FD} \cdot \vec{IK} = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times (-1) = 0$

La droite (FD) est orthogonale à deux vecteurs qui définissent le plan (IJK) . Elle est orthogonale à (IJK) .

1b. (3 pts) Cette droite étant dirigée par $\vec{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal à (IJK) , le plan admet une

équation cartésienne de la forme $-x + y - z + d = 0$.

Or $I \left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0 \right)$ appartient à ce plan, donc on a $-\frac{1}{2} + 0 - 0 + d = 0$ soit $d = \frac{1}{2}$.

Le plan (IJK) admet pour équation cartésienne $-x + y - z + \frac{1}{2} = 0$.

2. (2 pts) On utilise le point $F(1 ; 0 ; 1)$ et le vecteur $\vec{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour obtenir $(FD) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$

3. (2 pts) M appartient à (IJK) et à (FD) . Dans ce cas, il existe t tel que :

$$-(1 - t) + t - (1 - t) + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $M \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$.

4. (4 pts) On connaît déjà certains des vecteurs.

$$IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad IK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad JK = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Le triangle n'est ni isocèle ni équilatéral. Peut-être est-il rectangle ?

$JK^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ et $IJ^2 + IK^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Ainsi, IJK est rectangle en I d'après le théorème de Pythagore.

Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit peuvent être utilisés comme base et hauteur. Ainsi :

$$A_{IJK} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. (3 pts) Le segment $[FM]$ est perpendiculaire au plan (IJK) d'après 1 et M appartient à ce plan.

Le segment $[FM]$ est donc une hauteur du tétraèdre $FIJK$. Sa longueur est

$$FM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}. \text{ Ainsi :}$$

$$V_{FIJK} = \frac{A_{IJK} \times FM}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{3}{4}}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

6. (3 pts) On peut répondre à cette question en essayant de savoir si ces droites sont parallèles ou non coplanaires.

On a $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{KL} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles.

Pour savoir si elles sont coplanaires, il suffit de vérifier si L appartient au plan (IJK) : $-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Ainsi, L appartient au plan (IJK) . Les droites (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles mais elles sont coplanaires. Elles sont donc sécantes.

Exercice 3 (16 pts)

1a. (1 pt) On remplace x, y et z par les coordonnées de C dans l'équation du plan : $3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 3 \neq 0$

Donc C n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

1b. (2 pts)

Soit t un nombre réel. On remplace x, y et z par les membres de droite de l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$3(-t + 1) + 2t - (-t + 2) - 1 = -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$. Donc $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

2a. (3 pts) Le plan $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, par exemple $\vec{n}(-1; 2; -1)$.

Donc $\mathcal{P}'$ a pour équation $-x + 2y - z + d = 0$ où d est un nombre réel.

Or C appartient au plan $\mathcal{P}'$, donc on doit avoir : $-1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

Ainsi, $\mathcal{P}'$ a pour équation $-x + 2y - z - 3 = 0$.

2b. (2 pts) Soit t le paramètre de I dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Dans l'équation de $\mathcal{P}'$, on remplace x, y et z par les membres de droite de l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$-(-t + 1) + 2 \times 2t - (-t + 2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

Ainsi, I est le point de $\mathcal{D}$ de paramètre 1, soit $I(0; 2; 1)$.

2c. (2 pts) On calcule $CI = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

3a. (3 pts) On calcule la distance CM_t mise au carré, donc sans la racine.

$$CM_t^2 = (-t + 1 - 1)^2 + (2t - 3)^2 + (-t + 2 - 2)^2$$

$$= (-t)^2 + (2t - 3)^2 + (-t)^2$$

$$= t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2$$

$$= 6t^2 - 12t + 9$$

3b. (3 pts) On peut répondre à cette question avec la valeur minimale de CM_t^2 , c'est-à-dire du polynôme

$6t^2 - 12t + 9$. Soit $f: t \mapsto 6t^2 - 12t + 9$, cette fonction a pour dérivée $f': t \mapsto 12t - 12$

Le minimum de f est atteint là où f' s'annule, c'est-à-dire pour $t = 1$.

On a alors $f(1) = 6 - 12 + 9 = 3$.

Comme $f(t) = CM_t^2$, le minimum de CM_t est donc $\sqrt{f(1)} = \sqrt{3} = CI$.

Exercice 4 (20 pts)

1. (4 pts) On peut résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

en prenant $z = t$ comme le suggère la réponse. On peut aussi choisir deux points de $\mathcal{D}$ avec deux paramètres différents, et vérifier qu'ils appartiennent tous les deux aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2a. (3 pts) L'équation de $\mathcal{P}_\lambda$ peut s'écrire :

$$(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z - 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$$

et le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_\lambda$.

b. (2 pts) En prenant $\lambda = 0$, l'équation de $\mathcal{P}_\lambda$ devient $x + y + z = 0$, ce qui est l'équation de $\mathcal{P}$.

c. (2 pts) C'est le cas si et seulement si les vecteurs normaux $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ et $\vec{n}'(1; 1; 1)$ sont orthogonaux,

c'est-à-dire ssi $1 + \lambda + 1 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

3. (3 pts) On retrouve le fait que $\lambda = -1$ qu'on avait trouvé dans la question précédente.

L'équation de $\mathcal{P}_{-1}$ est : $-y + z + 4 = 0$

On résout le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

en prenant $y = t$, on obtient alors $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t \\ z = t - 4 \end{cases}$

(2 pts) $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1; 1)$.

La droite $\mathcal{D}$, d'après sa représentation paramétrique, a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2; 1; 1)$, égal à $\vec{u}$ (il aurait suffi qu'ils soient colinéaires). $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.

De plus, $\mathcal{D}$ passe par le point $M(-4; 4; 0)$ et en remplaçant t par 4 dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$, on constate que $\mathcal{D}'$ passe aussi par M . Elles sont donc confondues.

4. (4 pts) Soit $A'(x; y; z)$, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. $\overrightarrow{AA'}$ a donc pour coordonnées $(x - 1; y - 1; z - 1)$

$\mathcal{D}$ ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1; 1)$, on doit avoir $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$,

c'est-à-dire $-2(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + z = 0$.

Or A' est un point de $\mathcal{D}$, soit t son paramètre. On a alors :

$$-2x + y + z = 0 \Leftrightarrow -2(-4 - 2t) + (4 + t) + t = 0 \Leftrightarrow 12 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Ainsi, A' a pour coordonnées $(0; 2; -2)$.

On calcule donc $AA' = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 1)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$