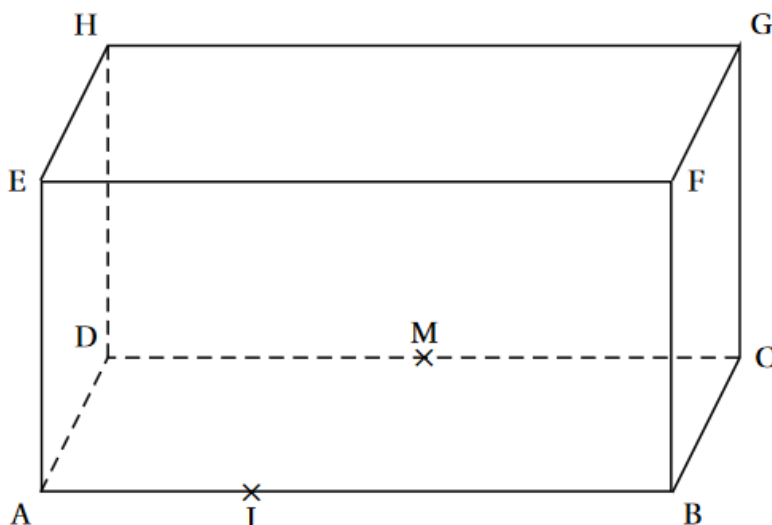


Révisions bac n°5 : Espace et orthogonalité

Exercice 1 (4 pts)

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère du point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$. On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F , H et M .

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF) .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est : $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

c. Le plan P dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG) .

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF) .

Déterminer les coordonnées du point N .

5. Le point R de coordonnées $(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ?

Justifier la réponse.

Exercice 2 (4 pts)

$ABCDEFGH$ est un cube.

I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .

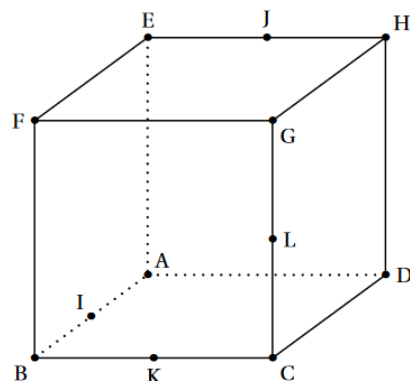
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD) .

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) . Déterminer les coordonnées du point M .

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?



Exercice 3 (4 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

1.
 - a. Le point $C(1; 3; 2)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Justifier.
 - b. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$.
 - b. Calculer les coordonnées du point I , point d'intersection du plan $\mathcal{P}'$ et de la droite $\mathcal{D}$.
 - c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-t + 1; 2t; -t + 2)$
 - a. Vérifier que pour tout nombre réel t , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$
 - b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Exercice 4 (5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}, \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel. On considère le plan $\mathcal{P}_\lambda$ d'équation $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.

- a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_\lambda$.
- b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont confondus.
- c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$.

Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

4. On considère le point $A(1; 1; 1)$. Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.