Révisions bac n°4 : études de fonction

Exercice 1 **(4 pts)**

Une banque souhaite mettre en place un système d'authentification à deux facteurs (abrégée en *A2F*) sur son site internet et son application. Ce système permet de sécuriser l'identification des clients et ainsi éviter les usurpations d'identité.

Toutefois, les clients doivent pour cela adopter le système d'*A2F*, ce qui nécessite du temps. On souhaite donc connaître le temps nécessaire pour que presque tous les clients adoptent le système.

Pour ce faire, le responsable du déploiement du système représente la proportion de clients ayant adopté l'*A2F* au bout d'un temps t exprimé en années, par la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{2t}\right)$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0, et sa limite en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition.
   Montrer que pour tout $t \in]0;+\infty[$, on a :
$$f'(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)}{2t^2}$$
3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. On admet que la fonction f est deux fois dérivable, et que sa dérivée seconde a pour expression :
$$f''(t) = \frac{(1-4t)\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)}{4t^4}$$
   Étudier la convexité de la fonction f. Donner les coordonnées de son point d'inflexion.
5. Le responsable du déploiement affirme que l'augmentation de la proportion de clients ayant adopté l'*A2F* ne ralentira que quand 25% des clients l'auront adoptée.
   D'après la question précédente, que pensez-vous de cette affirmation ?
6. Démontrer que l'équation $f(t) = 0{,}9$ admet une unique solution t_0 appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
7. Déterminer au bout de combien de temps, la proportion de clients ayant adopté l'*A2F* sera égale à 90%.
   On donnera une valeur exacte, et une valeur approchée en nombre de mois arrondi à l'unité.

Exercice 2 **(6 pts)**

Cet exercice est un QCM !

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$

admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x = -2$ **b.** $y = -1$ **c.** $y = -2$ **d.** $y = 0$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

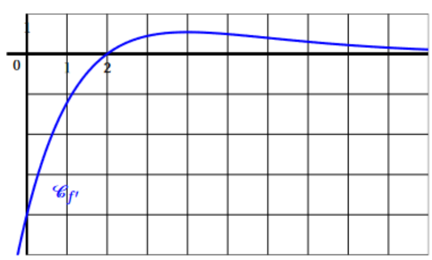
a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$ **b.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ **c.** $F(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$ **d.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$

3. On donne ci-contre la représentation graphique $C_{f'}$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On peut affirmer que la fonction f est :

a. concave sur $]0;+\infty[$ **b.** convexe sur $]0;+\infty[$

c. convexe sur $[0;2]$ **d.** convexe sur $[2;+\infty[$



Suite de l'exercice 2

4. Parmi les primitives de la fontion f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$

b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$

d. toutes sont croissantes sur $]-\infty; 0]$ et décroissantes sur $[0; +\infty[$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{3}$ **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$ **d.** 0

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions **b.** deux solutions **c.** une seule solution **d.** aucune solution

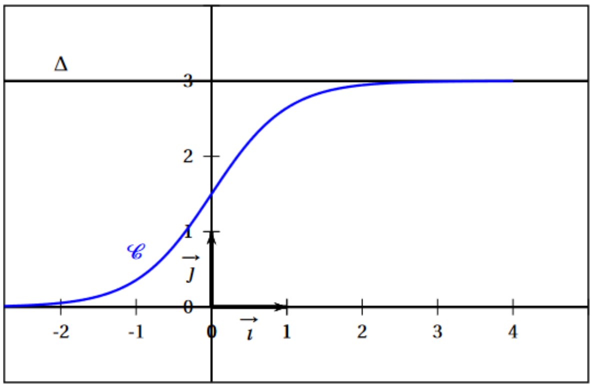
Exercice 3 **(4 pts)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe représentative C de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe C.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x})$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)dx$.

b. Démontrer que :

$$\int_0^a h(x)dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$$

c. On note D l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine D. *Toute trace de recherche sera valorisée.*

Exercice 4 **(6 pts)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$. Tracer (D) sur l'annexe.

c. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$

d. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $\mathcal{C}$.

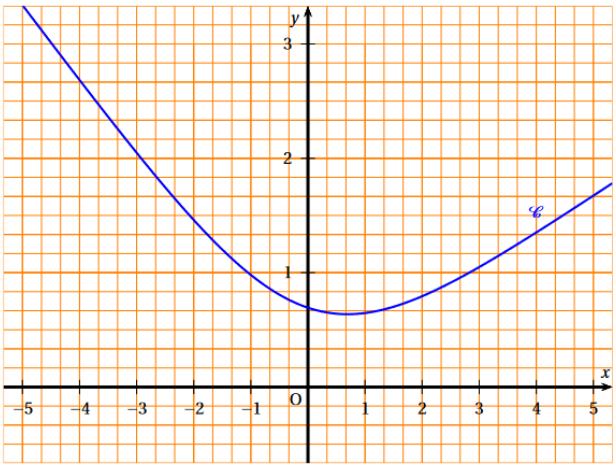
On note (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*

Soient M et N deux points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses non nulles et opposés.

Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).



<u>Exercice 5</u> (6 pts)

On considère l'équation notée (E): $\ln x = -x$.
Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

<u>Partie A</u> : existence et unicité de la solution On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

1. Détrerminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Vérifier que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

<u>Partie B</u> : encadrement de la solution α On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

- **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- **b.** En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
- **c.** Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

- **a.** En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
- **b.** En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

3. Recherche d'une valeur approchée de α.

- **a.** A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
- **b.** On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.