Correction des révisions bac n°3 : probabilités

Exercice 1 (16 pts)

1a. (3 pts) D'après l'énoncé,

$$p(\mathcal{F}_1) = \frac{1}{2} \quad p(\mathcal{F}_2) = \frac{1}{3} \quad p(\mathcal{F}_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

On a aussi : $p_{\mathcal{F}_1}(D) = 0{,}05$, $p_{\mathcal{F}_2}(D) = 0{,}015$ et $p(D) = 0{,}035$.

1b. (2 pts) $p(\mathcal{F}_1 \cap D) = p_{\mathcal{F}_1}(D) \times p(\mathcal{F}_1) = 0{,}05 \times \frac{1}{2} = 0{,}025$.

1c. (2 pts) $p(\mathcal{F}_2 \cap D) = p_{\mathcal{F}_2}(D) \times p(\mathcal{F}_2) = 0{,}015 \times \frac{1}{3} = 0{,}005$.

1d. (2 pts) D'après la formule des probabilités totales, $p(D) = p(\mathcal{F}_1 \cap D) + p(\mathcal{F}_2 \cap D) + p(\mathcal{F}_3 \cap D)$

Donc $p(\mathcal{F}_3 \cap D) = p(D) - p(\mathcal{F}_1 \cap D) - p(\mathcal{F}_2 \cap D) = 0{,}035 - 0{,}025 - 0{,}005 = 0{,}005$.

1e. (2 pts) On cherche :

$$p_{\mathcal{F}_3}(D) = \frac{p(\mathcal{F}_3 \cap D)}{p(\mathcal{F}_3)} = \frac{0{,}005}{\frac{1}{6}} = 0{,}03$$

2a. (3 pts) Soit X variable aléatoire correspondant au nombre de chaussettes tirées présentant un défaut. D'après l'énoncé, X compte le nombre de succès d'une répétition indépendante de 6 épreuves de Bernoulli dont la probabilité de « succès » est $p(D) = 0{,}035$ (et la probabilité d'échec est $1 - 0{,}035 = 0{,}965$).

On cherche $p(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0{,}035^2 \times 0{,}965^4 \approx 0{,}016$

2b. (2 pts) On cherche $p(X \leq 1)$, c'est-à-dire :

$$p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{6}{0} \times 0{,}965^6 + \binom{6}{1} \times 0{,}035 \times 0{,}965^5 = 0{,}965^6 + 6 \times 0{,}035 \times 0{,}965^5 \approx 0{,}983$$

Exercice 2 (8 pts)

Soient V l'événement « l'individu est vacciné » et M l'événement « l'individu est malade ».

L'énoncé conne $P(V) = 0{,}25$, $P_V(\overline{M}) = 0{,}92$ et $P(M) = 0{,}1$. Un arbre peut s'avérer très utile.

1. (5 pts) On pourrait avoir envie d'utiliser $P(\overline{V} \cap M) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(M)$, mais on ne connaît pas $P_{\overline{V}}(M)$.

On utilise plutôt la formule des probabilités totales : $P(M) = P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M)$,

c'est-à-dire $P(\overline{V} \cap M) = P(M) - P(V \cap M) = 0{,}1 - P(V) \times P_V(M)$

Or $P_V(\overline{M}) = 1 - P_V(M) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$.

Ainsi, $P(\overline{V} \cap M) = 0{,}1 - 0{,}25 \times 0{,}08 = 0{,}1 - 0{,}02 = 0{,}08$.

2. (3 pts) On cherche :

$$P_{\overline{V}}(M) = \frac{P(\overline{V} \cap M)}{P(\overline{V})}$$

Or $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, donc :

$$P_{\overline{V}}(M) = \frac{0{,}08}{0{,}75} = \frac{8}{75} \approx 0{,}106$$

Ce vaccin-là ne semble donc pas très efficace.

<u>Exercice 3</u> (16 pts)

1a. (2 pts) L'expérience peut être assimilée à la répétition indépendante de 3 épreuves de Bernouli de paramètre $\frac{1}{6}$. Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$, soit $X \sim \mathcal{B}\left(3\,;\frac{1}{6}\right)$.

1b. (1 pt) $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

1c. (2 pts) $P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{3\times 5}{216} = \frac{5}{72}$

2a. (2 pts) On a $P(D \cap A) = \frac{1}{2} \times \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{432} = \frac{5}{144}$ et $P(\overline{D} \cap A) = \frac{1}{2} \times \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$.

2b. (2 pts)

D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$

2c. (2 pts) On cherche à déterminer $P_A(\overline{D})$.

$$P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{48}{9 \times 7} = \frac{48}{63} = \frac{16}{21}$$

3a. (3 pts) L'expérience peut être assimilée à la répétition indépendante de n épreuves de Bernouli de paramètre $P(A) = \frac{7}{48}$. Appelons Y le nombre de 6 obtenus. On calcule :

$$p_n = P(B_n) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{41}{48}\right)^n$$

3b. (2 pts) $-1 < \frac{41}{48} < 1$ donc la limite de $\left(\frac{41}{48}\right)^n$ est 0 et (p_n) tend vers 1.

Cela signifie que la probabilité d'obtenir au moins un 6 se rapproche de 1 pour un grand nombre de lancers.

<u>Exercice 4</u> (16 pts)

Partie A 1. (2 pts) D'après l'énoncé, X compte le nombre de succès d'une répétition indépendante de 200 épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès (prélever une boîte non conforme) est 0,04.

2. (2 pts) $\mu = 0{,}04 \times 200 = 8$ et $V = 200 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 7{,}98$

Partie B 1. a. (2 pts) D'après la linéarité de l'espérance

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\big(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\big) = \frac{1}{n}\big(E(X) + \cdots + E(X)\big) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = 8$$

1. b. (2 pts) Comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on peut additionner les variances.

$$V(M_n) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\big(V(X_1) + \cdots + V(X_n)\big) = \frac{1}{n^2}\big(V(X) + \cdots + V(X)\big) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{7{,}68}{n}$$

2. a. (3 pts) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que pour tout δ :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

En l'appliquant avec $\delta = 1$, et avec l'espérance et la variance obtenues, on obtient :

$$P(|M_n - 8| \geq 1) \leq \frac{7{,}68}{n}$$

Or l'événement $|M_n - 8| \geq 1$ est le contraire de l'événement $|M_n - 8| < 1$.

On applique la probabilité d'un événement contraire :

$$P(|M_n - 8| < 1) \geq 1 - \frac{7{,}68}{n}$$

C'est l'inégalité que nous voulions.

Suite de la correction de l'exercice 4

2. b. (2 pts) $1-\frac{7{,}68}{n}\geq 0{,}9 \Leftrightarrow -\frac{7{,}68}{n}\geq -0{,}1 \Leftrightarrow \frac{7{,}68}{n}\leq 0{,}1 \Leftrightarrow 7{,}68\leq 0{,}1n \Leftrightarrow n\geq 76{,}8$
Ainsi, l'inégalité $P(|M_n-8|<1)\geq 0{,}9$ est assurée pour $n\geq 77$.
3. (3 pts) On prélève ici 80 lots, ce qui signifie que $n=80$.
Le nombre de boîtes non conformes trouvées par lot est de $\frac{900}{80}=11{,}25$.
Or, d'après **2b**, pour $n\geq 77$ (ce qui est le cas ici), le nombre de boîtes non conforme a au moins 90% de probabilité d'être compris dans l'intervalle $[7;9]$.
On peut donc se poser des questions sur la qualité, qui est bien moins bonne que prévu.

Exercice 5 (16 pts) **1. (3 pts)** Cela revient à répéter deux lancers de façon indépendante.
Les événements E_0, E_1 et E_2 forment une partition totale de l'univers.

$$p(E_0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$
$$p(E_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$
$$p(E_1)=1-p(E_0)-p(E_2)=1-\frac{10}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

2a. (3 pts) Au premier lancer, les probabilités indiquées sont celles de E_0, E_1 et E_2. Au deuxième lancer :
- si aucune face A n'avait été obtenue au premier, on reprend les probabilités de E_0, E_1 et E_2.
- si une face A avait été obtenue, les probabilités d'en avoir 0 ou 1 sont respectivement de $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

2b. (2 pts) On doit calculer :

$$\frac{9}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{9}{256}+\frac{3}{32}+\frac{1}{16}=\frac{9}{256}+\frac{24}{256}+\frac{16}{256}=\frac{49}{256}$$

2c. (4 pts) Soit G la variable aléaoire indiquant le gain du joueur.
S'il gagne le jeu, il aura obtenu 5 euros. On a déjà montré que : $p(G=5)=\frac{49}{256}$

La probabilité d'avoir un gain nul est celle d'obtenir exactement une face A, soit :

$$p(G=0)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)=\frac{3}{8}\times\frac{21}{16}=\frac{63}{128}=\frac{126}{256}$$

(notez que ça ne sert à rien, car cette probabilité sera multipliée par 0 dans le calcul de l'espérance).
La probabilité de perdre 5€ est cette de n'obtenir aucune face A deux fois d'affilée, soit :

$$p(G=-5)=\frac{9}{16}\times\frac{9}{16}=\frac{81}{256}$$

Ainsi, on cherche

$$E(G)=5\times p(G=5)+0\times p(G=0)-5\times p(G=-5)=5\times\frac{49}{256}-5\times\frac{81}{256}=-\frac{160}{256}=-\frac{5}{8}$$

En moyenne, on peut donc espérer perdre $\frac{5}{8}$ euros en jouant à ce jeu.
3a. (1 pt) L'expérience correspond à la répétition indépendante d'une épreuve de Bernoulli, où la probabilité de succès est $\frac{1}{4}$, donc X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$.
3b. (1 pt) On calcule $p(X=2)$ à la calculatrice pour trouver 0,282.
3c. (2 pts) Suivant la calculatrice qu'on a :
- on peut remarquer que $p(4\leq X<9)=p(4\leq X\leq 8)$
- ou que $p(4\leq X<9)=p(X\leq 8)-p(X\leq 3)$.Dans les deux cas, on trouve 0,224.