Révisions bac n°3 : probabilités

Exercice 1 (4 pts)

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$. Une étude statistique a montré que :

- $5\ \%$ des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- $1{,}5\ \%$ des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.
c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?
2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.
a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à $0{,}983$.

Exercice 2 (2 pts)

C'est une partie B d'un exercice plus long, la partie A portait sur les équations différentielles.
Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Le quart de la population est vacciné contre une maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades. On choisit au hasard un individu dans cette population.
1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 3 (4 pts)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué.
Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
b. Quelle est son espérance ?
c. Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
On considère les évènements D et A suivants :
• D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ; • A : « obtenir exactement deux 6 ».
a. Calculer la probabilité des évènements suivants. *(on pourra construire un arbre de probabilité)*
• « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
• « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».
b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.
c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Exercice 4 (4 pts)

Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes. La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est de $0{,}04$. Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est libré à une entreprise. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise.

Partie A 1. La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conforme dans un tel lot. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, et préciser ses paramètres.
2. Montrer que la variable aléatoire X a pour espérance $\mu = 8$ et pour variance $V = 7{,}68$.

Partie B Soit n un entier naturel non nul. On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes et ayant la même loi de probabilité que la variable X. On définit la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

1. a. Calculer l'espérance de M_n. **b.** Montrer que la variance de M_n est $\frac{7{,}68}{n}$
2. a. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(|M_n - 8| < 1) \geq 1 - \frac{7{,}68}{n}$
b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $P(|M_n - 8| < 1) \geq 0{,}9$
3. On admet pour la suite que, si on prélève n lots de 200 boîtes, M_n donne le nombre moyen de boîtes non conformes dans ces n lots.
On effectue un contrôle sur 80 lots de 200 boîtes, et on constate au total que 900 boîtes sont non conformes. Doit-on se poser des questions à propos de la qualité de la fabrication ? Justifier.

<u>Exercice 5</u> (4 pts)

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

Déterminer la probabilité des évènements suivants :

— E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,

— E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,

— E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante :

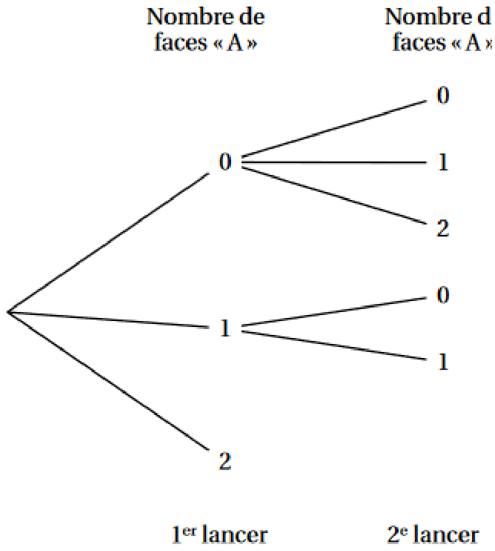
— Le joueur lance les deux dés simultanément.

— Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.

— Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.

— Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\frac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros.

Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Calculer le gain algébrique moyen. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. On organise un autre jeu en lançant 10 fois un seul dé et en comptant le nombre de faces « A » obtenues.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de faces « A » obtenues.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois la face « A ». Arrondir le résultat au millième.

c. Calculer $p(4 \leq X < 9)$. Arrondir le résultat au millième.