Correction des révisions bac n°2 : étude de fonctions, courbes, tangentes, convexité

Exercice 1 (20 pts)

1. a. (1 pt) On a $\lim_{x\to-\infty} 1+e^{-x}=+\infty$ or $\lim_{x\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc par composition, $\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})=+\infty$.

1. b. (2 pts) On a $\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$ or $\lim_{x\to1}\ln(X)=0$ donc par composition, $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$.

Cela signifie que la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

1. c. (3 pts) Pour x réel :

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

On multiplie ensuite le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\times e^x}{(1+e^{-x})e^x}=\frac{-1}{e^x+1}$$

et c'est ce qu'on voulait.

1. d. (2 pts) -1 est négatif, e^x+1 est positif pour tout x réel, donc $f'(x)$ est négatif et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

f n'admet par d'extremum, mais on pense bien à noter ses limites dans le tableau de variations.

2. a. (3 pts) T_0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit :

$$y=\frac{-1}{e^0+1}\times x+\ln(1+e^{-0})=-\frac{1}{2}x+\ln(2)$$

2. b. (2 pts) On détermine la dérivée seconde avec la formule $\left(\frac{1}{v}\right)'=\left(-\frac{v'}{v^2}\right)$ pour montrer qu'on la connaît encore.

Pour x réel :

$$f''(x)=-\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Cette dérivée seconde est positive pour tout x réel, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. c. (2 pts) La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, et en particulier C est au-dessus de la tangente T_0 de la question **2a.** On en déduit :

$$f(x)\geq -\frac{1}{2}x+\ln(2)$$

3. a. (3 pts) Soit x réel. On calcule et on regarde ce qui se passe avec les formules de ln.

$$f(x)-f(-x)=\ln(1+e^{-x})-\ln(1+e^x)=\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^x}\right)$$

On veut obtenir $-x$. On peut se dire que ce $-x$ viendra d'un $\ln(e^{-x})$.

On peut essayer de factoriser le numérateur par e^{-x}, puisque c'est ce qu'on veut faire apparaître.

$$f(x)-f(-x)=\ln\left(\frac{e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)}{1+e^x}\right)=\ln\left(e^{-x}\times\frac{e^x+1}{1+e^x}\right)=\ln(e^{-x}\times 1)=\ln(e^{-x})=-x$$

3. b. (2 pts) Deux droites sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur. Calculons celui de (M_aN_a).

Soit m ce coefficient directeur.

$$m=\frac{y_{N_a}-y_{M_a}}{x_{N_a}-x_{M_a}}=\frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)}=-\frac{a}{2a}=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, les deux droites ont bien le même coefficient directeur. Elles sont parallèles.

<u>Exercice 2</u> (20 pts)

Partie A 1. (1 pt) On applique la formule donnant la dérivée d'un produit. Pour tout x réel :

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = e^x + xe^x + e^x = (x+2)e^x$$

2. (2 pts) Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $(x+2)$, donc f est décroissante sur $]-\infty;-2]$ et croissante sur $[-2;+\infty[$. On a $f(-2) = -e^{-2}$

3. (1 pt) La tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x+1$

4. (3 pts) On dérive f' pour obtenir f''. $f'(x) = 1 \times e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$

Son signe ne dépend que de celui de $(x+3)$, donc f est concave sur $]-\infty;-3]$ et convexe sur $[-3;+\infty[$.

C_f admet un point d'inflexion de coordonnées $(-3; f(-3))$ soit $(-3;-2e^{-3})$.

5. (1 pt) En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2 pts) En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, le produit est une forme indéterminée.

Or $f(x) = (x+1)e^x = xe^x + e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Partie B *<u>Conseil</u> : on peut tracer à la calculatrice, les courbes de fonctions g_m pour différentes valeurs de m.*

1a. (3 pts) On cherche à trouver le rapport entre g_m et f.

$$f(x) = m \Leftrightarrow (x+1)e^x = m \Leftrightarrow xe^x + e^x = m \Leftrightarrow xe^x + e^x - m = 0$$

On s'intéresse maintenant à $g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - me^{-x} = 0$.

Dans cette équation, on multiplie les deux membres par e^x pour se débarasser du e^{-x}.

$$g_m(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1-me^{-x}) = 0 \Leftrightarrow xe^x + e^x - m = 0$$

On obtient bien la même équation, donc $f(x) = m \Leftrightarrow g_m(x) = 0$.

1b. (3 pts) L'abscisse x d'un point d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des ordonnées doit vérifier $g_m(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = m$.

Or d'après la partie A, f est continue, strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$ et strictement croissante sur $[-2;+\infty[$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(-2) = -e^{-2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = m$ admet :

- une solution si $m \geq 0$
- deux solutions si $-e^{-2} < m < 0$
- une solution si $m = -e^{-2}$
- aucune solution si $m < -e^{-2}$

Ainsi, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses est :

• 1 si $m \geq 0$ • 2 si $-e^{-2} < m < 0$ • 1 si $m = -e^{-2}$ • 0 si $m < -e^{-2}$

2. (2 pts) On peut utiliser, pour chaque valeur de m, l'image $g_m(0)$ pour identifier les courbes.

On en déduit que la courbe 1 est C_{-e}, la courbe 2 est C_0 et la courbe 3 est C_e.

3. (2 pts) Soit x réel. On calcule : $g_m(x) - (x+1) = -me^{-x}$, et le signe de cette expression est l'opposé de celui de m.

Ainsi, C_m est au-dessus de D si $m < 0$, C_m est en-dessous de D si $m > 0$, et enfin, si $m = 0$, C_m est confondue avec D.

<u>Exercice 3</u> (20 pts)

Partie A (4 pts) D'après l'énoncé, on doit avoir $h(0) = 0{,}1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$.

$$h(0) = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{a}{1+be^{-0{,}04\times 0}} = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{a}{1+b} = 0{,}1$$

Cela ne nous permet pas de trouver a ou b, on s'intéresse donc à la limite.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}04t} = 0$ par composition, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 + be^{-0{,}04t} = 1$ et par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{a}{1+be^{-0{,}04t}} = \frac{a}{1}$

Cette limite étant égale à 2, on a donc $a = 2$. Or en reprenant l'autre égalité obtenue :

$$\frac{a}{1+b} = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{1+b} = 0{,}1 \Leftrightarrow 2 = 0{,}1(1+b) \Leftrightarrow 2 = 0{,}1 + 0{,}1b \Leftrightarrow 0{,}1b = 1{,}9 \Leftrightarrow b = 19$$

Ainsi, $a = 2$ et $b = 19$, donc :

$$h(t) = \frac{2}{1+19e^{-0{,}04t}}$$

On se rassure en remarquant que cela correspond à la fonction f de la **partie B**.

Suite de la correction de l'exercice 3

Partie B 1. (2 pts) f est de la forme $2\times\frac{1}{v}$ avec $v(t)=1+19e^{-0,04t}$. Sa dérivée est donc de la forme $2\times(-\frac{v'}{v^2})$. Ainsi :

$$f'(t)=\frac{1,52e^{-0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})^2}$$

(2 pts) L'exponentielle d'un nombre, tout comme le carré d'un réel, étant toujours positifs, on en déduit que $f'(t)$ est positif pour tout $t\in[0\,;250]$ et que f est croissante sur $[0\,;250]$.

2. (4 pts) On doit résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned}
&f(t)>1,5\\
&\Leftrightarrow \frac{2}{1+19e^{-0,04t}}>1,5\\
&\Leftrightarrow 2>1,5(1+19e^{-0,04t})\\
&\Leftrightarrow 2>1,5+28,5e^{-0,04t}\\
&\Leftrightarrow 0,5>28,5e^{-0,04t}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{57}>e^{-0,04t}\\
&\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{57})>\ln(e^{-0,04t})\\
&\Leftrightarrow -\ln(57)>-0,04\text{t}\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(57)}{0,04}<t
\end{aligned}$$

Ainsi, le temps nécessaire est donné par $\frac{\ln(57)}{0,04}$, soit environ 102 jours.

3. (1 pt) Dans l'expression de f, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $e^{0,04t}$.

$$f(t)=\frac{2\times e^{0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})\times e^{0,04t}}=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19e^{-0,04t}\times e^{0,04t}}=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$$

(1 pt) Déterminons la dérivée de F, qui est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$$F'(t)=50\times\frac{0,04\times e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$$

On retrouve bien f, ainsi F est une primitive de f.

4. (2 pts) La croissance semble être maximale pour $t\approx 70$. La hauteur du plan est alors d'environ $0,9\ m$.

5. (4 pts) Le signe de f'' est l'opposé de celui de $(1-19e^{-0,04t})$. On résout une inéquation pour déterminer son signe.

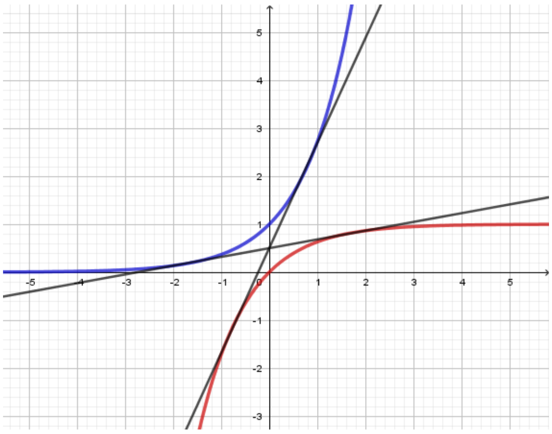
$$\begin{aligned}
&1-19e^{-0,04t}\geq 0\\
&\Leftrightarrow 1\geq 19e^{-0,04t}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{19}\geq e^{-0,04t}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{19}\right)\geq -0,04t\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(19)}{0,04}\leq t
\end{aligned}$$

On a $t\approx 74$ donc $f''(t)$ est négatif sur $[74;250]$ et positif sur $[0,74]$.

On en déduit que f est concave sur $[74;250]$ et convexe sur $[0,74]$. Sa courbe admet un unique point d'inflexion.

Exercice 4 (24 pts)

Partie A (3 pts)



Partie B

1a. (2 pts) On a pour tout x, $f'(x) = e^x$. Donc le coefficient directeur de la tangente à C_f en A est $f'(a) = e^a$.

1b. (1 pt) On a pour tout x, $g'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$. Le coefficient directeur de la tangente à C_f en B est e^{-b}.

1c. (1 pt) Le coefficient directeur est le même pour les deux tangentes. On a $e^a = e^{-b} \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow b = -a$.

2. (2 pts) L'équation de la tangente $\mathcal{D}$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = e^a(x-a) + e^a$

mais c'est aussi $y = f'(b)(x-b) + f(b) = e^{-b}(x-b) + (1-e^{-b}) = e^a(x+a) + (1-e^a)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&e^a(x-a) + e^a = e^a(x+a) + (1-e^a)\\
&\Leftrightarrow e^a x - ae^a + e^a = e^a x + ae^a + 1 - e^a\\
&\Leftrightarrow e^a x - e^a x - ae^a - ae^a + e^a + e^a - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow -2ae^a + 2e^a - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2(a-1)e^a + 1 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, a est bien solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

1a. (1 pt) En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$

(1 pt) En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, le produit est une forme indéterminée.

Or $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1 = 2xe^x - 2e^x + 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 1$.

1b. (2 pts) On applique la formule de dérivation d'un produit :

$$\varphi'(x) = 2(1 \times e^x + (x-1)e^x) = 2(e^x + xe^x - e^x) = 2xe^x$$

Cette dérivée est du signe de x : négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.

1c. (2 pts) φ est donc décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. On a $\varphi(0) = -1$.

2a. (3 pts) φ est continue, strictement monotone sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$. D'un autre côté, $\varphi(0) < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2b. (2 pts) On trouve $\alpha \approx -1{,}68$ et $\beta \approx 0{,}77$.

Partie D 1. (3 pts) Il suffit de montrer que le coefficient directeur de la droite (EF) est égal à $f'(\alpha) = e^\alpha$.

Ce coefficient directeur est donné par :

$$\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{g(-\alpha) - f(\alpha)}{-\alpha - \alpha} = \frac{1 - e^\alpha - e^\alpha}{-2\alpha} = \frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha}$$

Il est égal à e^α si et seulement si $1 - 2e^\alpha = -2\alpha e^\alpha \Leftrightarrow 2\alpha e^\alpha - 2e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha-1)e^\alpha + 1 = 0$,

c'est-à-dire $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui est le cas par définition de α. Ainsi, (EF) est tangente à la courbe C_f au point E.

2. (1 pt) On a $g'(-\alpha) = e^{-(-\alpha)} = e^\alpha$. Le nombre dérivé de g en $-\alpha$ est donc également égal au coefficient directeur de (EF), et ainsi (EF) est tangente à C_g au point F.