

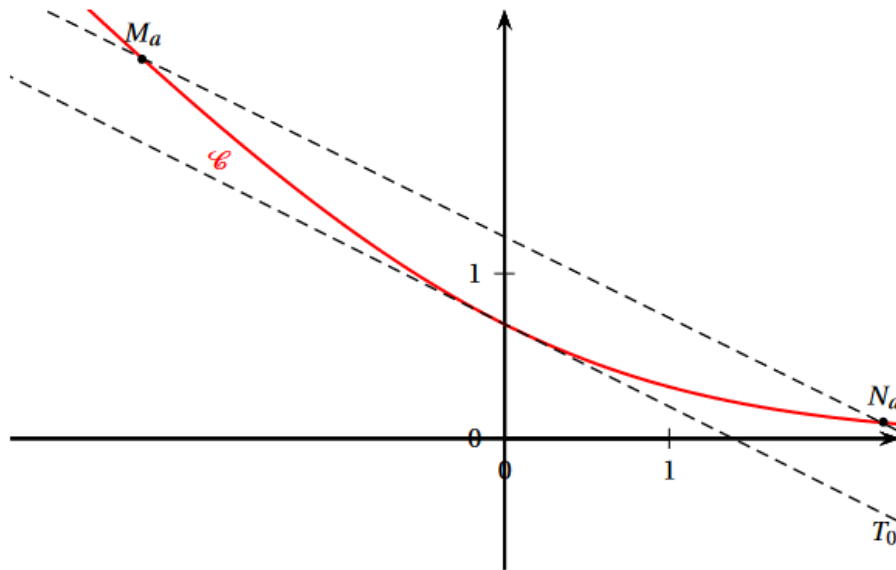
Révisions bac n°2 : étude de fonctions, courbes, tangentes, convexité

Exercice 1 (5 pts) Sujet n°2 de 2023. Un début très classique sans surprise, puis un pic de difficulté en question 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. La courbe est tracée ci-dessous.



1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
 - c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

Calculer $f'(x)$ puis montrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$

- d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - a. Déterminer une équation de la tangente T_0 .
 - b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
 - c. En déduire que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe de $\mathcal{C}$ d'abscisse respectives $-a$ et a . On a donc $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) - f(-x) = -x$.
 - b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

Exercice 2 (5 pts)

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$. On n'indiquera pas les limites, pour l'instant.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
4. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et donner les coordonnées de son point d'inflexion.
5. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. Compléter le tableau de variations de la question 2.

Partie B

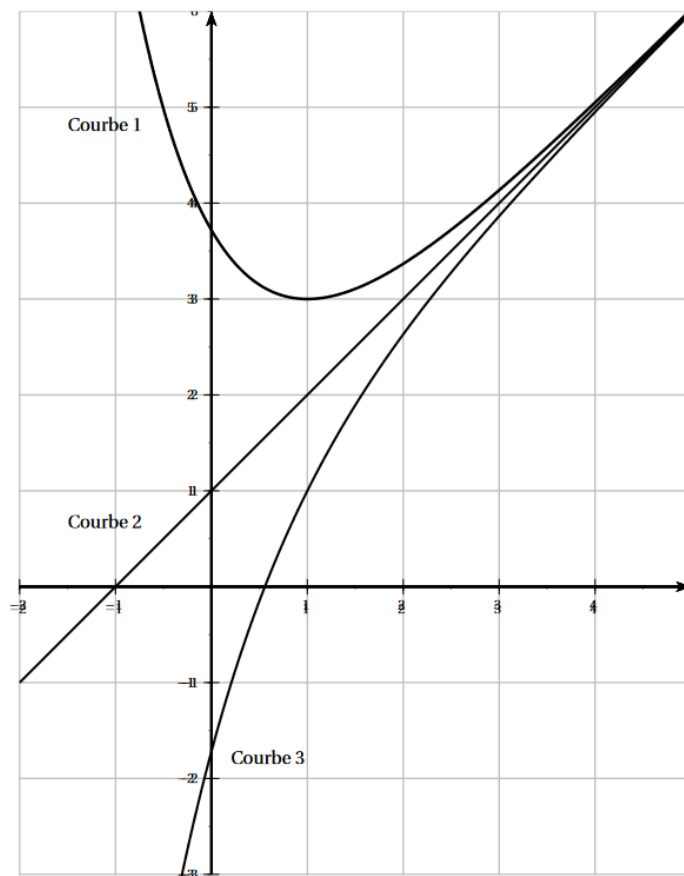
On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note C_m la courbe de la fonction g_m dans un repère orthonormé du plan.

1.
 - a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
 - b. Dédire de la partie A, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses, en fonction du réel m .
2. On a représenté en annexe les courbes C_0 , C_e et C_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$). Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe, en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe C_m par rapport à la droite D d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs de m .

Annexe



Exercice 3 (5 pts)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

Le graphique donné en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1\text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t . En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5\text{ m}$.

3. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 250]$, on a $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$

Montrer alors que la fonction F définie sur $[0; 250]$ par $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de f .

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs : elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t . En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

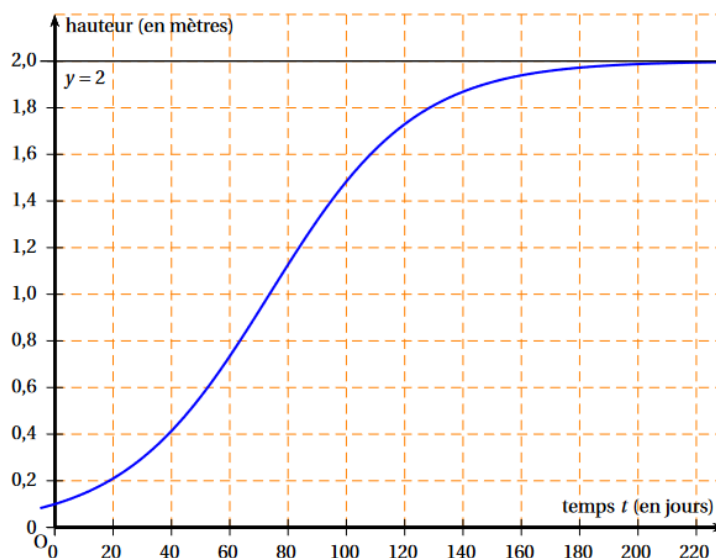
5. On admet que la dérivée seconde f'' de f a pour expression :

$$f''(t) = \frac{-0,0608e^{-0,04t}(1 - 19e^{-0,04t})}{(1 + 19e^{-0,04t})^3}$$

Étudier la convexité de f . Combien sa courbe admet-elle de points d'inflexion ?

On donnera des valeurs approchées à l'unité.

Annexe



Exercice 4 (6 pts)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$

Les courbes représentatives C_f et C_g de ces fonctions sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes. On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a , et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

1.
 - a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A .
 - b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B .
 - c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x - 1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1$.

1.
 - a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2.
 - a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
 - b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation. A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β , arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe C_f d'abscisse α , et F le point de la courbe C_g d'abscisse $-\alpha$, où α est le nombre réel défini dans la partie C.

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E .
2. Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F .

Annexe

