

Correction des révisions bac n°1 : suites

Exercice 1 (24 pts)

Partie A_1. (2 pts) On a :

$$u_1 = 3 - \frac{10}{5+4} = 3 - \frac{10}{9} = \frac{27}{9} - \frac{10}{9} = \frac{17}{9}$$

$$u_2 = 3 - \frac{10}{\frac{17}{9} + 4} = 3 - \frac{10}{\frac{17}{9} + \frac{36}{9}} = 3 - \frac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \frac{90}{53} = \frac{159}{53} - \frac{90}{53} = \frac{69}{53}$$

Heureusement, on ne demande pas u_3 .

2. (3 pts) Initialisation : on a bien $u_0 = 5 \geq 1$.

Hérédité : Soit n entier naturel, supposons que $u_n \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 1 \\ \Leftrightarrow u_n + 4 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow \frac{10}{u_n + 4} &\leq \frac{10}{5} \\ \Leftrightarrow -\frac{10}{u_n + 4} &\geq -2 \\ \Leftrightarrow 3 - \frac{10}{u_n + 4} &\geq 3 - 2 \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &\geq 1 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.

3. (3 pts) Soit n entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{3(u_n + 4) - 10 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

On n'a pas trouvé ce que l'énoncé demandait, mais on peut développer le numérateur de l'énoncé :

$$(1 - u_n)(u_n + 2) = u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n = -u_n^2 - u_n + 2$$

On trouve bien le même résultat, donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

4. (2 pts) Pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$. Donc $(1 - u_n)$ est négatif, $(u_n + 2)$ et $(u_n + 4)$ sont positifs.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ est négatif et la suite (u_n) est décroissante.

5. (2 pts) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge.

Partie B 1. a. (4 pts) Tout d'abord :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{5 - 1}{5 + 2} = \frac{4}{7}$$

Ensuite, pour n entier naturel, on cherche à exprimer $v_{n+1} = qv_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1}{3 - \frac{10}{u_n + 4} + 2} = \frac{2 - \frac{10}{u_n + 4}}{5 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{\frac{2(u_n + 4) - 10}{u_n + 4}}{\frac{5(u_n + 4) + 10}{u_n + 4}} = \frac{2(u_n + 4) - 10}{5(u_n + 4) + 10} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 2)} = \frac{2}{5} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de premier terme $\frac{4}{7}$ et de raison $\frac{2}{5}$.

Pour se débarrasser des $u_n + 4$ au dénominateur, on a utilisé le fait sur $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

Suite de la correction de l'exercice 1

b. (2 pts) On a alors pour tout n entier naturel :

$$v_n = \frac{4}{7} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Ce produit ne comprend que des facteurs positifs strictement inférieurs à 1, donc $v_n \neq 1$.

2. (2 pts) On repart de la définition de (v_n) et on essaie d'exprimer u_n en fonction de v_n .

Pour n entier naturel :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

On a une égalité avec une fraction. On peut essayer la propriété du produit en croix : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

$$\Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n - u_n + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) + 2v_n + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n - 1}{(v_n - 1)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$

3. (2 pts) (v_n) est une suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1 , elle tend vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2 \times 0 + 1}{1 - 0} = 1$$

Partie C L'algorithme calcule l'indice du premier terme tel que u_n est strictement inférieur à 1,01.

1. (1 pt) On peut utiliser le tableau de valeurs de la suite. La variable n contient la valeur 6.

2. (1 pt) C'est le plus petit indice n tel que $u_n < 1,01$.

Exercice 2 (12 pts)

Partie A 1. (2 pts) Soit x réel.

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2 + 1)} = e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

2. (4 pts) f est dérivable sur $[0; 1]$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

Ainsi, $f'(x)$ est positif pour tout $x \in [0; 1]$ et ainsi f est croissante sur cet intervalle.

On a $f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1^2 + 1) = 1 - \ln(2)$ donc $f(1) < 1$.

On en déduit bien que si $x \in [0; 1]$ alors $0 \leq f(x) < 1$.

Partie B_1. (2 pts) Initialisation : On a bien $u_0 = 1 \in [0; 1]$.

Hérédité : Soit n entier naturel, supposons que $u_n \in [0; 1]$.

Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 1]$ d'après la **partie A**.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0; 1]$.

Suite de la correction de l'exercice 2

2. (2 pts) Soit n entier naturel.

On a $u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$

Or $u_n^2 + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n^2 + 1)$ est positif, ainsi $u_{n+1} - u_n$ est négatif.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

3. (2 pts) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

f est continue, donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$.

Or la solution de cette équation a été trouvée en **partie A** : c'est 0.

Donc (u_n) a pour limite 0.

Exercice 3 (20 pts)

Partie A

1. (2 pts) On trouve $u_1 = 2,5$ puis $u_2 = 2,875$.

2. (2 pts) Avec un tableau de valeurs dans la calculatrice, on obtient $u_3 \approx 2,99219$ et $u_4 \approx 2,99997$.

3. (2 pts) Il semblerait que (u_n) soit croissante et converge vers 3.

Partie B

1. (3 pts) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$$

Voilà qui a l'air compliqué. On se rappelle qu'on est censés obtenir $-\frac{1}{2}v_n^2$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}(u_n - 3)^2$.

Essayons de factoriser par $-\frac{1}{2}$ et de trouver une identité remarquable.

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 2 \times u_n \times 3 + 3^2) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 = -\frac{1}{2}v_n^2$$

2. (3 pts) Initialisation : On a $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$, ainsi $-1 \leq v_0 \leq 0$.

Hérédité : Soit n entier naturel, supposons que $-1 \leq v_n \leq 0$.

On applique la fonction carré, décroissante sur cet intervalle:

$$1 \geq v_n^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0 \text{ et on a bien } -1 \leq v_{n+1} \leq 0.$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.

3a. (1 pt) Soit n entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

b. (2 pts) On a pour tout n entier naturel, $-1 \leq v_n \leq 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$ et ainsi $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$

Ainsi, le facteur $(\frac{1}{2}v_n + 1)$ est positif. On sait de plus que v_n est négatif, donc $v_{n+1} - v_n = -v_n(\frac{1}{2}v_n + 1)$ est positif pour tout n entier naturel. Ainsi, (v_n) est croissante.

4. (1 pts) La suite (v_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge.

5. (2 pts) L'équation $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ a pour solutions 0 et -2 (on le trouve en factorisant ou avec un polynôme), mais -2 n'est pas dans l'intervalle considéré. On en déduit que $\ell = 0$.

6. (2 pts) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$.

On en déduit que u_n est bien croissante et tend vers $0 + 3 = 3$. Les conjectures sont validées.

Exercice 4 (16 pts)

1a. (4 pts) f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Pour tout $x \geq 0$, x et $(1+x)$ sont positifs, donc f' est positive sur tout son ensemble de dérivation et f est croissante. Or $f(0) = 0 - \ln(1+0) = -\ln(1) = 0$, donc $f(x)$ est positif pour tout $x \geq 0$.

On en déduit que $x - \ln(1+x) \geq 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$.

1b. (3 pts) Soit n entier naturel non nul. On a :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or d'après la question précédente :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi,

$$\ln(u_n) = n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n \times \frac{1}{n} \leq 1$$

1c. (2 pts) On applique la fonction $\exp$ à l'inégalité précédente, on obtient $u_n \leq e$ pour tout entier naturel n . La suite (u_n) est majorée, elle ne peut pas avoir pour limite $+\infty$.

2a. (3 pts)

$$v_n = \ln(u_n) = n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

(on s'aide de la question **2b** pour trouver la forme attendue)

2b. (2 pts) On trouve (avec la calculatrice, ou avec les croissances comparées), que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Ensuite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2c. (2 pts) On a $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$ et ainsi (u_n) converge vers $e^1 = e$.

Exercice 5 (20 pts)

Partie A (11 pts)

1. (2 pts)

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{11}{5} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} = \frac{18}{5} \quad u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{324}{90} + \frac{275}{90} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{599}{90} = \frac{599}{180}$$

2. (2 pts) Sur l'intervalle considéré,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{11}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2}$$

Le signe ne dépend que de $x^2 - 11$, qui est bien positif pour $x \geq \sqrt{11}$, donc f est croissante sur cet intervalle.

3. (3 pts) On a bien $u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$. Soit n entier naturel, supposons que $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

On applique la fonction f est qui croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$, on obtient $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq \sqrt{11}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11}$. La propriété est bien vérifiée.

4. (2 pts) (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

5. (2 pts) f étant continue, on peut appliquer le théorème du point fixe : $f(a) = a$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(a + \frac{11}{a} \right) &= a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} a + \frac{11}{2a} - a &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} a + \frac{11}{2a} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} a^2 + \frac{11}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 &= \frac{11}{2} \\ \Leftrightarrow a^2 &= 11 \end{aligned}$$

Cette équation a pour solutions $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$, mais d'après 3, la limite est bien $\sqrt{11}$.

Partie B (9 pts)

1a. (1 pt) Le rectangle R_0 a pour aire 11 et pour longueur $L_0 = 5$. Sa largeur l_0 est donc bien $\frac{11}{5} = 2$.

1b. (1 pt) De même, la largeur l_n de tout rectangle R_n d'aire 11 et de longueur L_n est $\frac{11}{L_n}$.

2. (2 pts) On a bien $L_0 = u_0 = 5$. Vérifions que la formule de récurrence est la même. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} = \frac{1}{2} (L_n + l_n) = \frac{1}{2} \left(L_n + \frac{11}{L_n} \right)$$

Ainsi, la formule de récurrence est la même. Donc pour tout n entier naturel, $L_n = u_n$.

3. (2 pts) On a déjà montré en **partie A** que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{11} \leq u_n$, c'est-à-dire $\sqrt{11} \leq L_n$.

Par passage à l'inverse, on a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{11}} \geq \frac{1}{L_n} \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{11}} \geq \frac{11}{L_n} \Leftrightarrow \sqrt{11} \geq l_n$$

Ainsi, on a bien trouvé $l_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

4. (1 pt) Cela signifie que le rectangle R_n , en quelque sorte, converge vers un carré de côté $\sqrt{11}$, qui a toujours une aire de 11. On peut donc approcher $\sqrt{11}$ en construisant une suite de rectangles.

5a. (1 pt) On obtient $L_3 = u_3 \approx 3,316643$ et $l_3 = \frac{11}{L_3} \approx 3,316606$

5b. (1 pt) ... ce qui est un encadrement de $\sqrt{11}$: $3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643$.