

Révisions bac n°1 : suites

Cette fiche de révision fait l'impasse sur les exercices de suites « arithmético-géométriques » (de la forme $u_{n+1} = au_n + b$) qui se ressemblent généralement tous et sont les plus faciles. Vous pouvez en trouver dans le DS ou les exercices de fin de chapitre.

Exercice 1 (6 pts) Une suite récurrente et plusieurs calculs de fractions.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \end{cases}$$

Partie A

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$
 3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. A l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ≥ 1,01, faire :
    n ← n + 1
    u ← 3 - 10 / (u + 4)
Fin Tant que
```

Exercice 2 (3 pts) Étude de fonction, puis application à une suite récurrente.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0; 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite en justifiant.

Exercice 3 (5 pts) Un exercice classique avec une suite récurrente qui n'utilise pas de fonction définie à part.

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A : conjecture

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$
b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n) et on admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$. Déterminer la valeur de ℓ .
6. Les conjectures de la **partie A** sont-elles validées ?

Exercice 4 (4 pts)

Un calcul de limite original, qui utilise la fonction $\ln$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x)$$

- a. En étudiant les variations de la fonction, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.
 - c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.
 - a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x .
 - b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 (5 pts) Début classique avec des calculs de fractions un peu longs, puis on arrive vers une méthode géométrique pour approcher $\sqrt{11}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A – Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a .

Partie B – Application géométrique

Pour tout entier n , on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée l_n et la longueur L_n .

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2}$$

1 a. Expliquer pourquoi $l_0 = 2,2$.

b. Établir que pour tout entier naturel n ,

$$l_n = \frac{11}{L_n}$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $l_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

4. On admet que les deux suites (L_n) et (l_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n) :  
    L = 5  
    l = 2.2  
    for i in range(n) :  
        L = (L+l) / 2  
        l = 11 / L  
    return round(l, 6), round(L, 6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x, k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour l et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.