Correction des révisions avant le bac blanc – Suites

Exercice S1

1. On ajoute d'abord 80, puis on diminue le résultat de 5% :
$u_1 = (3\,000 + 80) \times 0{,}95 = 3\,080 \times 0{,}95 = 2\,926$.
2. Comme vu en question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0{,}95 = 0{,}95u_n + 0{,}95 \times 80 = 0{,}95u_n + 76$
3a. Initialisation : On a $u_0 = 3\,000$, ainsi $u_0 > 1\,520$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 1\,520$ et montrons que $u_{n+1} > 1\,520$.
Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&u_n > 1\,520\\
&\Leftrightarrow 0{,}95u_n > 0{,}95 \times 1\,520\\
&\Leftrightarrow 0{,}95u_n + 76 > 1\,444 + 76\\
&\Leftrightarrow u_{n+1} > 1\,520
\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1\,520$.
3b. *On pourrait refaire une récurrence (voire même, on aurait pu la faire en même temps que la question **3a**), mais soyons civilisés et utilisons une autre méthode.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n = -0{,}05u_n + 76$
Or d'après la question **3a** :

$$\begin{aligned}
&u_n > 1\,520\\
&\Leftrightarrow -0{,}05u_n < -0{,}05 \times 1520\\
&\Leftrightarrow -0{,}05u_n + 76 < -76 + 76\\
&\Leftrightarrow -0{,}05u_n + 76 < 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ est négatif pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (u_n) est décroissante.
3c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 520. Elle est donc convergente.
4a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,520 = 0{,}95u_n + 76 - 1\,520 = 0{,}95u_n - 1\,444 = 0{,}95\left(u_n - \frac{1\,444}{0{,}95}\right) = 0{,}95(u_n - 1\,520)\\
&= 0{,}95v_n
\end{aligned}$$

On a montré que (v_n) est géométrique de raison 0,95. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1\,520 = 1\,480$.
4b. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1\,480 \times 0{,}95^n$.
Or $v_n = u_n - 1\,520 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1\,520 = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.
4c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$ car $-1 < 0{,}95 < 1$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1\,480 \times 0{,}95^n = 0$.
Enfin, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520 = 1\,520$. La limite de (u_n) est 1 520.
5.
```
def CTAC() :
  n = 0
  u = 3000
  while u >= 2000 :
    n = n + 1
    u = 0.95*u + 76
  return n
```
6. La réserve marine fermera car la limite est inférieure à 2 000. L'année de fermeture est renvoyée par le programme Python *(mais on peut surtout la trouver à la calculatrice avec le tableau de valeurs)*, on trouve en effet $n = 22$. Il s'agit donc de l'année $2017 + 22$, soit 2039.

Exercice S2

1. La suite (p_n) est une suite explicite. Son sens de variation est donc le même que celui de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2-42x+4$. La dérivée est $f'(x)=2x-42$ qui est positive sur $[22\,;+\infty[$.

Ainsi, (p_n) est croissante à partir du rang $n=22$. On peut même vérifier que $u_{21}=-437$ mais $u_{22}=-436$. Ainsi, l'affirmation 1 est fausse.

2. *L'affirmation a l'air suffisamment compliquée pour être vraie.* Pour $n\in\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-1=\left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2-1=\frac{1}{9}(u_n^2+8)-1=\frac{1}{9}u_n^2+\frac{8}{9}-1=\frac{1}{9}u_n^2-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(u_n^2-1)=\frac{1}{9}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{9}$. L'affirmation 2 est vraie.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$n^2\leq(n+1)^2w_n\leq n^2+n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{(n+1)^2}\leq w_n\leq\frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+2n+1}\leq w_n\leq\frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2\times 1}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=1$ et de même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2n+1}=1$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=1$ par le théorème des gendarmes. L'affirmation 3 est vraie.

Exercice S3

1.

$$u_1=\frac{6\times 8+2}{8+5}=\frac{50}{13}$$

2a. Il s'agit d'une forme indéterminée, mais on factorise le numérateur et le dénominateur par x.

$$f(x)=\frac{x\left(6+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\frac{6+\frac{2}{x}}{1+\frac{5}{x}}$$

Ainsi, par quotient, la limite de f en $+\infty$ est 6.

2b. f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour $x>0$:

$$f'(x)=\frac{6(x+5)-(6x+2)\times 1}{(x+5)^2}=\frac{28}{(x+5)^2}$$

Cette dérivée étant strictement positive sur $[0;+\infty[$, f est strictement croissante sur cet intervalle.

2c. Calculons $f(2)$.

$$f(2)=\frac{6\times 2+2}{2+5}=\frac{14}{2}=2$$

Ainsi, $f(2)=2$. Or f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, si $x>2$, alors $f(x)>2$.

2d. Une récurrence, ça faisait longtemps ☺

Initialisation : pour $n=0$, on a bien $u_0=8>2$.

Hérédité : soit n entier naturel, supposons que $u_n>2$.

D'après la question **2c**, on a alors $f(u_n)>2$, or $u_{n+1}=f(u_n)$, donc $u_{n+1}>2$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a $u_n>2$.

*(on aurait aussi pu utiliser la croissance stricte de f, plutôt que la question **2c**)*

3a. Comme on sait maintenant que pour tout n entier naturel, on a $u_n>2$, alors :

- $(2-u_n)$ est négatif,
- et (u_n+1) et u_n+5 sont positifs

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ est négatif pour tout entier naturel n, et donc (u_n) est décroissante.

<u>Suite de la correction de l'exercice S3</u>

3b. (u_n) est donc décroissante et minorée par 2. Elle converge donc vers une limite ℓ.

4a.

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8-2}{8+1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

4b. On calcule pour n entier naturel :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2 - 2(u_n + 5)}{u_n + 5}}{\frac{6u_n + 2 + 1(u_n + 5)}{u_n + 5}} = \frac{6u_n + 2 - 2(u_n + 5)}{6u_n + 2 + 1(u_n + 5)} = \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7}v_n$$

(v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

4c. La raison de (v_n) est comprise entre -1 et 1, donc (v_n) tend vers 0.

Soit ℓ la limite de (u_n). Or on a $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et un produit en croix fournit $u_n - 2 = v_n(u_n + 1)$ c'est-à-dire $u_n = v_n(u_n + 1) + 2$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0(\ell + 1) + 2 = 2$

5. seuil(2.001) renvoie le plus petit n tel que $u_n \leq 2{,}001$, c'est-à-dire 14.

<u>Exercice S4</u>

1. Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ. Alors cette limite est un réel supérieur ou égal à 2.
Mais alors, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0^+$ et par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Donc (v_n) ne converge pas toujours vers un réel ! **<u>Faux.</u>**

2. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:$u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow u_n - 2 \leq u_{n+1} - 2$
Or en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{3}{u_n - 2} \geq \frac{3}{u_{n+1} - 2} \Leftrightarrow v_n \geq v_{n+1}$$

Ainsi (v_n) est bien décroissante. **<u>Vrai.</u>**

3. On essaie de raisonner de la même manière :

$$u_n \leq 3 \Leftrightarrow u_n - 2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{u_n - 2} \geq \frac{3}{1} \Leftrightarrow v_n \geq 3$$

On trouve que la suite (v_n) est en fait *minorée* par 3… La réponse est sans doute fausse.
En guise de contre-exemple, prenons (u_n) suite constante donc les termes sont égaux à 2,5 (elle est bien majorée par 3 et vérifie bien la condition $u_n > 2$ de l'énoncé), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2} = \frac{3}{2{,}5 - 2} = \frac{3}{0{,}5} = 6$$

Ainsi (v_n) n'est pas majorée par 3. **<u>Faux.</u>**

Exercice S5

1a. Une question qui sert surtout pour vous, à vérifier que vous avez bien compris la définition de la suite.

$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 3 = 12.$

1b. $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = 53.$

1c. La suite semble croissante et sa limite semble $+\infty$.

2a. <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ alors que $0 + 1 = 1$. On a bien $u_0 \geq 0 + 1$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq n + 1$. Démontrons que $u_{n+1} \geq n + 2$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$u_n \geq n + 1$

$\Leftrightarrow 5u_n \geq 5(n + 1)$

$\Leftrightarrow 5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n - 3$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n + 2$

L'hérédité est bien vérifiée.

<u>Conclusion</u> : Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n + 1$.

2b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3a. On a pour n entier naturel :

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) - 1 = 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 = 5u_n - 5n - 5 = 5(u_n - n - 1) = 5v_n$

v_n est donc géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2$.

3b. On a donc $v_n = 2 \times 5^n$. Ne pas hésiter à regarder la suite de l'exercice pour vérifier sa réponse.

3c. $v_n = u_n - n - 1$ implique que $u_n = v_n + n + 1 = 2 \times 5^n + n + 1$.

3d. Les suites v_n et $(n + 1)$ sont toutes les deux croissantes, donc la somme de ces suites l'est également.

On peut aussi, de façon plus compliquée, calculer $u_{n+1} - u_n$ et vérifier que le résultat est positif.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 5^{n+1} + (n + 1) + 1 - (2 \times 5^n + n + 1) \\ &= 2 \times 5^{n+1} + n + 2 - 2 \times 5^n - n - 1 \\ &= 2 \times 5^n \times 5 - 2 \times 5^n + 1 \\ &= 2 \times 5^n(5 - 1) + 1 \\ &= 2 \times 5^n \times 4 + 1 \end{aligned}$$

et cette expression est positive.

4a. ci-contre

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while u < 10 000 000 :
        u = 5*u - 4*n - 3
        n = n + 1
    return n
```

4b. D'après la calculatrice, ce programme renvoie $n = 10$.

Exercice S6

1. <u>Initialisation</u> : On a $u_0 = 1$, ainsi $1 \leq u_0 \leq e^2$. La propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq e^2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$.

Par hypothèse de récurrence (on utilise aussi le fait que la fonction racine carrée soit croissante) :

$$\begin{aligned} &1 \leq u_n \leq e^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{e^2} \\ &\Leftrightarrow e \times 1 \leq e \times \sqrt{u_n} \leq e \times e \\ &\Leftrightarrow e \leq u_{n+1} \leq e^2 \end{aligned}$$

Or $1 \leq e$. On a donc bien $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$.

<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e^2$.

<u>Suite de la correction de l'exercice S6</u>

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n étant positif : $u_{n+1} - u_n = e \times \sqrt{u_n} - u_n = e \times \sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}^2 = \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})$

Or $\sqrt{u_n}$ est positif et $u_n \leq e^2$ d'après la question **1**, donc $\sqrt{u_n} \leq e$. Ainsi $\left(e - \sqrt{u_n}\right)$ est positif.

On en conclut que $u_{n+1} - u_n$ et que (u_n) est croissante.

De plus, cette suite est majorée par e^2 : elle est donc convergente.

3a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln\left(e \times \sqrt{u_n}\right) - 2 \\ &= \ln(e) + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3b. Le premier terme de v_n est $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = -2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{2}{2^n} = -\frac{2}{2 \times 2^{n-1}} = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

3c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \ln(u_n) - 2 \Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 2 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n+2} = e^{-\frac{1}{2^{n-1}}+2}$$

3d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ car $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} + 2 = 2$.

Donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2^{n-1}}+2} = e^2$.

4A. Si $u_0 = 1\,000$, alors on peut calculer $u_1 = e \times \sqrt{u_0} = e \times \sqrt{1\,000} \approx 85{,}96$.

Donc $u_1 < u_0$: c'est pas très croissant, tout ça. <u>L'affirmation 1 est fausse.</u>

4B. *C'est l'encadrement qu'on a établi par récurrence en question **1**. Peut-on le retrouver si $u_0 = 2$?*

<u>Initialisation</u> : On a $u_0 = 2$, ainsi $1 \leq u_0 \leq e^2$. La propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq e^2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$.

On peut appliquer exactement les mêmes étapes qu'à la question **1**.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e^2$. <u>L'affirmation 2 est vraie.</u>

Notez que la limite de cette nouvelle suite est aussi e^2.

4C. *L'affirmation mentionne « si et seulement si », donc il faut prouver ce résultat dans les deux sens : direct et réciproque.*

• Si $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_1 = e \times \sqrt{u_0} = e \times \sqrt{0} = 0$ et donc on peut montrer par récurrence que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est bien constante.

• Supposons que la suite soit constante. On a par exemple $u_1 = u_0$, c'est-à-dire $u_0 = e \times \sqrt{u_0}$. Or :

$$u_0 = e \times \sqrt{u_0} \Leftrightarrow u_0^2 = \left(e \times \sqrt{u_0}\right)^2 \Leftrightarrow u_0^2 = e^2 u_0^2 \Leftrightarrow u_0^2 - e^2 u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0(u_0 - e^2) = 0$$

Cette équation produit nul a deux solutions : $u_0 = 0$, et $u_0 = e^2$.

Ainsi, la suite est aussi constante si $u_0 = e^2$. On ne peut donc pas dire qu'elle est constante « si et seulement si » $u_0 = 0$. <u>L'affirmation 3 est fausse.</u>

Exercice S7

1a. Pour $x \in [0;1]$, $f(x) = x \Leftrightarrow 2xe^{-x} = x \Leftrightarrow 2xe^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x(2e^{-x} - 1) = 0$.
Il s'agit d'une équation produit nul, dont la première solution est $x = 0$,
et l'autre vérifie $2e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -x = -\ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(2)$.
Ainsi, les solutions de cette équation sont 0 et $\ln(2)$.
1b. On dérive f comme un produit. Pour $x \in [0;1]$, $f(x) = 2e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) = 2e^{-x}(1-x)$ et on retrouve bien la forme voulue.
1c. Pour tout $x \in [0;1]$, $(1-x)$ est positif, de même que e^{-x}. $f'(x)$ est donc positif sur $[0;1]$ et f est croissante sur cet intervalle. On calcule les extremums : $f(0) = 2 \times 0 \times e^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1}$.
2a. <u>Initialisation</u> : On a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) = 2 \times 0{,}1 \times e^{-0{,}1} = 0{,}2e^{-0{,}1} \approx 0{,}18$.
Ainsi $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. La propriété est vraie au rang 0.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
Or f étant croissante d'après **1c**, on a alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$.
Mais $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \leq 1$.
Ainsi on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2b. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente vers une limite ℓ.
3. Cette limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, donc $\ell = 0$ ou bien $\ell = \ln 2$ d'après **1a**. Or (u_n) est croissante de premier terme 0,1 : sa limite ne peut pas être 0. Ainsi, la limite de la suite (u_n) est $\ln 2$.
4a. La suite (u_n) étant croissante, elle est majorée par sa limite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln 2$.
On en déduit que $\ln 2 - u_n$ est positif.
4b. On complète la boucle while ainsi :

```
while log(2) - u > 0.0001 :
    n = n + 1
    u = 2*u*exp(-u)
```

4c. La fonction renvoie le nombre 11, car $\ln(2) \approx 0{,}6931$ et $u_{11} \approx 0{,}6931$ est le premier terme de la suite (u_n) à approcher $\ln 2$ à 10^{-4} près, c'est-à-dire avec 4 chiffres exacts.