Révisions avant le bac blanc – Suites

Certains exercices font intervenir la fonction ln. Ils sont signalés par un $(\boldsymbol{ln})$ entre parenthèses.

Exercice S1

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.
Déterminé à changer la situation, il s'exclame : « c'est assez ! »
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :
• entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
• entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif.
On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\ 000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\ 926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1\ 520$.
b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

4. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\ 520$.
a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera le premier terme.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n + 1\ 520$.
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Recopier et compléter l'algorithme pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def CTAC() :
  n = 0
  u = ...
  while ... :
     n = n + 1
     u = ...
  return n
```

6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ?
Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice S2

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 42n + 4$.
Affirmation 1 : la suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et(v_n) définies par :
• $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$ • $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.
Affirmation 2 : la suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une quite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$.
Affirmation 3 : la suite (w_n) converge.

Exercice S3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.
Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

Exercice S4

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n > 2$.

Soit (v_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2}$$

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne rapportera pas de points.

Affirmation 1 : « Si la suite (u_n) converge vers un réel, alors la suite (v_n) converge vers un réel ».

Affirmation 2 : « Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est décroissante ».

Affirmation 3 : « Si la suite (u_n) est majorée par 3, alors la suite (v_n) est majorée par 3 ».

Exercice S5

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.

b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

c. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variations ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n + 1$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manièntre incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Exercice S6 ($\boldsymbol{ln}$)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.*

Affirmation A : si $u_0 = 1\,000$, alors la suite (u_n) est croissante.

Affirmation B : si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$.

Affirmation C : la suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$.

Exercice S7 ($\boldsymbol{ln}$)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$$

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est ln 2.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln 2 - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de ln 2 par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
from math import *
def seuil() :
  n = 0
  u = 0.1
  while log(2) - u ... 0.0001 :
     n = n + 1
     u = ...
  return (u,n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil.