Correction des révisions avant le bac blanc – Géométrie

Exercice G1

1. $\begin{cases} 11 = -4 + 3t \\ -9 = 6 - 3t \\ -22 = 8 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 3t \\ -15 = -3t \\ -30 = -6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 5 \\ t = 5 \end{cases}$. Ainsi $M_2 \in d'$ et les autres points donnent des contradictions. **Réponse B.**

2. On retrouve les coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ en facteur de t dans la représentation de d'. **Réponse C.**

3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le système de la réponse B est un piège grossier (regardez les signes). Par contre, en utilisant le point $A(1; 1; -2)$ et l'opposé $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, on obtient la **Réponse D.**

4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires avec $\vec{u} = -1{,}5\vec{v}$. Les droites sont donc parallèles.

Ouf, pas de point d'intersection à rechercher. Pour vérifier si elles sont confondues, vérifions si un point de l'une appartient à l'autre, par exemple A à d' : $\begin{cases} 1 = -4 + 3t \\ 1 = 6 - 3t \\ -2 = 8 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3t \\ -5 = -3t \\ -10 = -6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{5}{3} \end{cases}$

On se moque de nous depuis le début, les droites d et d' sont en fait la même droite ! **Réponse D.**

5. On calcule $-2\vec{u} - 1{,}5\vec{v} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1{,}5\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} = \vec{w}$. **Réponse A.**

6. Attention, l'origine est D ! On regarde bien l'ordre des vecteurs de la base de l'espace pour trouver que $F(1; 1; 1)$ et $G(0; 1; 1)$, ainsi le milieu a pour coordonnées $(0{,}5; 1; 1)$. **Réponse B.**

Exercice G2

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Pour que la proposition soit vraie, il faudrait $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Donc D n'est pas l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Faux

2. d est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\-8\end{pmatrix}$, et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$.

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc d et (AB) ne sont pas parallèles. Faux

3. Pour que d et (AB) soit tout de même coplanaires, il faut donc qu'elles soient sécantes.

(AB) admet pour représentation paramétrique (AB): $\begin{cases}x=1+k\\y=2-3k\\z=-1+4k\end{cases}, k\in\mathbb{R}$

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un éventuel point d'intersection. Il existe alors t et k réels tels que :

$$\begin{cases}2t+2=1+k\\-3t-4=2-3k\\-8t+3=-1+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2t+1\\-3t-4=2-3(2t+1)\\-8t+3=-1+4(2t+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2t+1\\3t=3\\-16t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2t+1\\t=1\\t=0\end{cases}$$

On aboutit à une contradiction, donc d et (AB) ne sont pas sécantes. Elles sont non-coplanaires. Faux

4. Il faut déterminer si le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Si c'est le cas, il existe α et β réels tels que $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. Dans ce cas :

$$\begin{cases}2=\alpha+\beta\\-3=-3\alpha-3\beta\\2=4\alpha+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-\beta\\-3=-3(2-\beta)-3\beta\\2=4(2-\beta)+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-\beta\\-3=-6+3\beta-3\beta\\2=8-4\beta+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-\beta\\-3=-6\\-6=-2\beta\end{cases}$$

Dans la deuxième ligne, on peut supprimer tous les β, mais on trouve alors une égalité qui est une contradiction. Donc α et β n'existent pas. $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace. Vrai

5. d' est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-9\\10\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Le plan (ABD) peut être défini par A, et par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On cherche à savoir s'il existe α et β réels tels que $\vec{v}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$. Dans ce cas :

$$\begin{cases}4=\alpha+2\beta\\-9=-3\alpha-3\beta\\10=4\alpha+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4-2\beta\\-9=-3(4-2\beta)-3\beta\\10=4(4-2\beta)+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4-2\beta\\-9=-12+6\beta-3\beta\\10=16-8\beta+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4-2\beta\\3=3\beta\\-6=-6\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=1\\\beta=1\end{cases}$$

On ne trouve pas de contradiction sur β. Ainsi, $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Le vecteur directeur de d' est un vecteur du plan (ABD). Donc d' est parallèle au plan (ABD). Vrai

Exercice G3

1. On a $B(6;4;0)$, $E(0;4;4)$, $F(6;4;4)$ et $G(6;0;4)$.

2. Le rectangle $EFGH$, base de la pyramide, a une aire de $6 \times 4 = 24$ unités d'aire.
De plus, le point S ayant pour coordonnées $(3;2;6)$, la hauteur de la pyramide est de 2 unités de longueur.

$$V_{pyramide} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$$

Or $V_{pavé} = 6 \times 4 \times 4 = 96$, donc $V_{maison} = 16 + 96 = 112$.
Or $112 = 7 \times 16 = V_{pyramide}$, le volume de la pyramide représente bien le septième du volume total de la maison.

3a. $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}3-6\\2-4\\6-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix}$

3b. Ainsi, la représentation paramétrique de la droite (BS) est, en partant du point B, $\begin{cases}x = 6-3t\\y = 4-2t\\z = 6t\end{cases}$

4a. La droite (AF) est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, et la droite (d) par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (d) et (AF) ne sont pas parallèles.

4b. Soient t et s deux réels.

$$\begin{cases}3t = -4+s\\4 = 8-2s\\2t = 2+s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3t = -4+s\\2s = 8-4\\2t = 2+s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3t = -4+s\\s = 2\\2t = 2+s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3t = -4+2\\s = 2\\2t = 2+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3t = -2\\s = 2\\2t = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -\frac{2}{3}\\s = 2\\t = 2\end{cases}$$

On aboutit à une contradiction, avec deux valeurs de t différentes. Les droites ne sont pas sécantes, et l'oiseau ne passera pas par la droite (AF), fort heureusement pour son intégrité physique.

Exercice G4 **1.** Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ n'appartient pas au plan (ABD) qui est défini par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ces trois vecteurs sont non-coplanaires, ils définissent bien une base de l'espace.

2a. $B(1\,;0\,;0)$ et $H(0\,;1\,;1)$. Ainsi $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}1-t-1\\t\\t\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}$.

2b. On voit alors que $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BH}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires ; les points B ; H et M sont alignés.

3. (BH) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et (FC) est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (BH) et (FC) ne sont pas parallèles. Soit N un éventuel point d'intersection, il existe alors t et t' réels tels que :

$\begin{cases}1-t=1\\t=t'\\t=1-t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=0\\t=t'\\t=1-t\end{cases}$. Or la ligne $t=1-t$ est une contradiction, donc (BH) et (FC) sont non-coplanaires.

4a. Le vecteur MM' a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}1-(1-t)\\t'-t\\1-t'-t\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}t\\t'-t\\1-t'-t\end{pmatrix}$ Ainsi :

$MM'^2=t^2+(t'-t)^2+(1-t'-t)^2=t^2+t'^2-2t't+t^2+1-t'-t-t'+t'^2+tt'-t+tt'+t^2$
$=3t^2+2t'^2-2t-2t'+1$

Or l'expression proposée par l'énoncé est :

$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}$
$=3\left(t^2-2t\times\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)+2\left(t'^2-2t'\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}$
$=3t^2+2t'^2-2t-2t'+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
$=3t^2+2t'^2-2t-2t'+1$ d'où l'égalité voulue.

4b. L'expression est minimale pour $t=\frac{1}{3}$ et $t'=\frac{1}{2}$ car les parenthèses $\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2$ s'annulent alors.

On a alors $MM'=\frac{1}{6}$ donc $MM'=\sqrt{\frac{1}{6}}$.