Correction des révisions avant le bac blanc – Fonctions

Exercice F1

A1. Par somme, c'est une forme indéterminée. On factorise pour x positif : $g(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ par produit. *On pouvait aussi factoriser par e^x.*
A2. On dérive la fonction g : $g'(x) = 1 - e^x$
Pour étudier le signe de $g'(x)$, il faut résoudre l'inéquation :

$$g'(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1 \geq e^x$$

Or la fonction exp est croissante et c'est e^0 qui est égal à 1, ainsi $e^0 \geq e^x$ et $0 \geq x$.
Ainsi, $g'(x)$ est positif pour $x \leq 0$, c'est-à-dire x négatif. Or g est définie sur $[0; +\infty[$.
Donc $g'(x)$ est négatif sur $[0; +\infty[$ et g est décroissante sur $[0; +\infty[$.
A3. g est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
De plus, $g(0) = 0 + 2 - e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, or $0 \in]-\infty; 1]$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
A4. La calculatrice nous dit que $1{,}146 < \alpha < 1{,}147$
A5. g est décroissante et s'annule en α . Ainsi, $g(x)$ est positif sur $[0; \alpha]$ puis négatif sur $[\alpha; +\infty[$.
A6. On dérive à nouveau la fonction g : $g''(x) = -e^x$. Cette fonction est négative, donc g est concave sur $[0; +\infty[$.
B1a. On pose $u(x) = e^x - 1$ et on a $u'(x) = e^x$.
On pose aussi $v(x) = xe^x + 1$, on a alors $v'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ Ainsi,

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1) \times e^x(1 + x)}{(xe^x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1 - (e^x - 1)(1 + x))}{(xe^x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1 - e^x - xe^x + 1 + x)}{(xe^x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2}$$

On obtient bien l'expression voulue.
B1b. L'exponentielle et les carrés étant toujours positifs, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $g(x)$.
Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $[0; \alpha]$ puis négatif sur $[\alpha; +\infty[$ et f est croissante sur $[0; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.
B2a. Pour rappel, α est le nombre qui vérifie $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{e^\alpha = \alpha + 2}$.
Ainsi,

$$f(x) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

B2b. Comme $1{,}146 < \alpha < 1{,}147$, on en déduit que :

$$\frac{1}{1{,}146 + 1} > \frac{1}{\alpha + 1} > \frac{1}{1{,}147 + 1}$$

soit $0{,}47 > f(\alpha) > 0{,}46$
B3. T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or :
$f'(0) = \frac{e^0 \times g(0)}{(0e^0 + 1)^2} = \frac{1\times1}{1^2} = 1$ et $f(0) = 0$. Donc T a pour équation $y = x$.

Exercice F2

1. La calculatrice peut aider, en recherchant les antécédents de 0. On peut remarquer qu'il y en a 3.
Sinon, on peut aussi factoriser par x. $f(x) = \boldsymbol{x}(x^2 - 0{,}9x - 0{,}1)$
f s'annule donc pour $x = 0$, et le polynôme dans la parenthèse a un discriminant positif, ce qui fait deux racines. L'équation $f(x) = 0$ admet donc 3 solutions. **Réponse D.**

2. Avec la formule du produit, $f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(1 + x)$.
On a $f(1) = 1e^1 = e$; $f'(1) = e^1(1 + 1) = 2e$, et la tangente a pour équation :
$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2e(x - 1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$. **Réponse B.**

3. La calculatrice peut être d'une grande aide pour deviner la réponse.
f étant définie sur $\mathbb{R}$, sa courbe n'a pas d'asymptote verticale (pas de limite infinie en un nombre). On peut éliminer A et B.
Ensuite, on peut par exemple chercher la limite en $+\infty$ (ou $-\infty$, c'est la même ici). C'est une forme indéterminée, mais on trouve -2 en factorisant. La droite d'équation $y = -2$ est donc une asymptote à la courbe. **Réponse C.**

4. Attention : comme précisé en gras, il s'agit de la courbe de f' !
Pour étudier la convexité de f, il faut étudier les variations de f' (ou le signe de f'', mais on ne l'a pas ici).
f semble croissante sur $[0; 4]$, puis décroissante ensuite. **Réponse C.**

5. La suite est croissante et majorée par $\frac{1}{n}$, qui est une suite qui tend vers 0. On peut donc affirmer qu'elle converge, mais c'est tout (elle pourrait converger vers un nombre inférieur à 0). **Réponse B.**

Exercice F3

A1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

A2. En $-\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée, mais $f(x) = xe^{x-1} + 1 = \boldsymbol{xe^{x}} \times e^{-1} + 1$.

Or par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{xe^{x}} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{0} \times e^{-1} + 1 = 1$.

A3. On pose $u(x) = x$ et donc $u'(x) = 1$. On pose aussi $v(x) = e^{x-1}$ et donc $v'(x) = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$.

Ainsi, $f'(x) = 1e^{x-1} + x \times e^{x-1} = e^{x-1}(x+1)$

A4. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $(x+1)$, qui est négatif sur $]-\infty;-1]$ puis positif sur $[-1;+\infty[$. f est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ puis croissante sur $[-1;+\infty[$.

Dans le tableau de variations, on pense à écrire les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

ainsi qu'à calculer la valeur de l'extremum $f(-1) = -1e^{-1-1} + 1 = -e^{-2} + 1 = 1 - e^{-2}$

A5. On dérive à nouveau comme un produit :

$$f''(x) = 1e^{x-1} + (x+1) \times 1e^{x-1} = e^{x-1}(x+2)$$

Ainsi, f est concave sur$]-\infty;-2]$ puis convexe sur $[-2;+\infty[$.

B1. On applique la formule : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$

On factorise par e^{a-1}.

$$y = e^{a-1}\big((a+1)(x-a) + a\big) + 1 = e^{a-1}(ax - a^2 + x - a + a) + 1 = e^{a-1}(ax - a^2 + x) + 1$$

B2. L'origine du repère est le point $(0;0)$. Dans l'équation de la tangente, on calcule y pour $x = 0$.

$$y = e^{a-1}(a \times 0 - a^2 + 0) + 1 = e^{a-1} \times (-a^2) + 1 = 1 - a^2e^{a-1}$$

Ainsi, on a bien $y = 1 - a^2e^{a-1}$ pour $x = 0$, et la tangente passe par l'origine si et seulement si $1 - a^{2e^{a-1}} = 0$.

B3. On vérifie d'abord que 1 est une solution de l'équation : $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 \times 1 = 0$.

Il faut ensuite montrer que cette solution est la seule. Cela fait penser au TVI.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. On s'intéresse donc à l'équation $g(x) = 0$.

La dérivée de g est $g'(x) = -(2xe^{x-1} + x^2e^{x-1}) = -e^{x-1}(2x + x^2) = -xe^{x-1}(2+x)$

Pour $x \in]0;+\infty[$, cette dérivée est strictement négative, donc g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On applique le TVi : g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et 0 appartient bien à l'intervalle $]-\infty;1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

Comme on a déjà vérifié que 1 était solution de ette équation, cela fait bien de 1 l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$ sur $]0;+\infty[$.

B4. Il suffit de reprendre l'équation de T_a pour $a = 1$.

$$y = e^{1-1}(x - 1^2 + x) + 1 = 1(2x - 1) + 1 = 2x$$

On obtient bien une droite passant par l'origine.

B5. On a montré en **A5** que f est convexe sur $[-2;+\infty[$, donc la courbe C_f est au-dessus de cette tangente.

Exercice F4

1a. Attention au produit xe^{-x} !

On a $f'(x) = 1 + 1e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) + 1$

Notez qu'on n'arrive pas à étudier son signe : $f'(x)$ n'est pas factorisé.

On calcule aussi $f''(x) = -e^{-x}(1 - x) + e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(-(1 - x) - 1) = e^{-x}(x - 2)$

1b. *L'énoncé est inhabituel : on vous demande les variations de f'.*

Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $(x - 2)$: négatif sur $]-\infty; 2]$ puis positif sur $[2; +\infty[$.

Ainsi, f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$.

1c. f' atteint donc son minimum en 2.

Or $f'(2) = e^{-2}(1 - 2) + 1 = 1 - e^{-2}$. Or $e^{-2} < 1$ donc ce nombre est strictement positif, donc pour tout réel x, $f'(x)$ est strictement positif.

1d. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ par composition, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par produit puis par somme.

La limite en $+\infty$ est une forme indéterminée, mais $f(x) = x + 1 + xe^{-x} = x\left(1 + \frac{1}{x} + e^{-x}\right)$

La parenthèse a pour limite 1, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

1e. L'équation de la tangente est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Or $f'(0) = e^{-0}(1 - 0) + 1 = 1 \times 1 + 1 = 2$ et $f(0) = 0 + 1 + 0e^{-0} = 1$. Ainsi, $y = 2(x - 0) + 1 = 2x + 1$.

1f. On a montré en **1b** que f est en fait concave sur $]-\infty; 2]$. Sa courbe C_f est donc en-dessous de ses tangentes.

Ainsi, on a bien $f(x) \leq 2x + 1$.

2a. f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et bien sûr $2 \in]-\infty; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 2$ admet bien une unique solution α.

2b. La calculatricenous dit que $\alpha \approx 0{,}66$.

2c. $f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 + xe^{-x} = 2 \Leftrightarrow x + xe^{-x} = 1 \Leftrightarrow x(1 + e^{-x}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e^{-x}} \Leftrightarrow x = \frac{e^x \times 1}{e^x \times (1+e^{-x})}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

2d. On dérive la fonction h : $h'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. Ainsi, h est croissante sur $[0; 1]$.

2e. On a $h(0) = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{2}$ et $h(1) = \frac{e^1}{e^1+1} = \frac{e}{e+1}$ qui est aussi compris entre 0 et 1.

Ainsi, comme h est croissante sur $[0; 1]$ et que $h(0)$ et $h(1)$ sont compris entre 0 et 1, alors si x appartient à $[0; 1]$, alors $h(x)$ appartient aussi à $[0; 1]$.