Révisions avant le bac blanc – Fonctions

Exercice F1

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x+2-e^x$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
5. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
6. Étudier la convexité de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

1. **a.** Montrer que pour tout x positif :

$$f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2. **a.** Prouver que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

b. En utilisant l'encadrement de α, donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse 0.

Exercice F2 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Aucune justification n'est demandée. Les cinq questions sont indépendantes.*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-0{,}9x^2-0{,}1x$.
Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$ est : **a.** 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

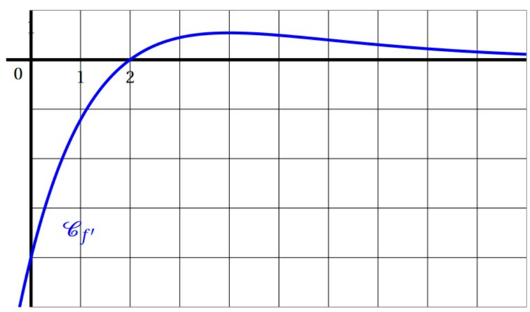
2. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$ est : **a.** $y=ex+e$ **b.** $y=2ex-e$ **c.** $y=2ex+e$ **d.** $y=ex$

3. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$$

admet pour asymptote la droite d'équation : **a.** $x=-2$ **b.** $x=-1$ **c.** $y=-2$ **d.** $y=-1$

4. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}'_f$ de la **fonction dérivée f'** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On peut affirmer que la fonction f est :
a. concave sur $]0\,;+\infty[$ **b.** convexe sur $]0\,;+\infty[$
c. convexe sur $[0;4]$ **d.** convexe sur $[2;+\infty[$



5. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n\leq u_{n+1}\leq\dfrac{1}{n}$

On peut alors affirmer que :
a. la suite (u_n) diverge **b.** la suite (u_n) converge
c. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice F3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1$$

On note C_f sa courbe représentative.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

5. Étudier la convexité de f.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à C_f au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à C_f en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche sera valorisée.*

Démontrer que 1 est l'unique soution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

5. Étudier la position relative de C_f et de cette tangente sur $]0; +\infty[$.

Exercice F4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer f', la dérivée de f, et f'', la dérivée seconde de f.

b. Étudier le sens de variation de f'.

c. En déduire que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

d. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

e. Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

f. En déduire que, pour tout $x \leq 2$, $f(x) \leq 2x + 1$.

. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

b. Donner une valeur approchée au centième de α.

c. Prouver que résoudre l'équation $f(x) = 2$ équivaut à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = x$$

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

e. En déduire que, si x appartient à $[0; 1]$, alors $0 \leq h(x) \leq 1$.