Correction du sujet de Bac blanc 2026

Exercice 1 — 24 points

1. (2 pts) La fonction f semble croissante sur son ensemble de définition. Sa courbe semble admettre une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2. (2 pts) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\,ln(x-2) = 0$.

Il s'agit d'une équation produit nul. Soit $x = 0$, ce qui est impossible car f est définie pour $x > 2$, soit $\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x-2)} = e^0 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$. La solution est donc 3.

3. (3 pts) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x - 2 = 0^+$ donc par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln(x-2) = -\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

Cela confirme que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

4. (2 pts) On dérive f comme un produit.

$$f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$$

5a. (2 pts) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$ par composition. Le quotient est une forme indéterminée, mais :

$$\frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}}$$

et ce quotient a pour limite 1 en $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

5b. (3 pts) g est la somme de $\ln(x-2)$ et d'un quotient.

$$g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1(x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

5c. (3 pts) Le signe de $g'(x)$ ne dépend que de $x - 4$, qui est négatif sur $]2;4]$ puis positif sur $[4;+\infty[$.

Donc g est décroissante sur $]2;4]$ puis croissante sur $[4;+\infty[$.

Son minimum est :

$$g(4) = \ln(4-2) + \frac{4}{4-2} = \ln(2) + 2$$

5d. (1 pt) Le minimum de g est un nombre strictement positif, donc pour tout $\in\ ]2;+\infty[$, $g(x) > 0$.

5e. (1 pt) La dérivée de f est g, qui est strictement positive. Donc f est croissante sur $]2;+\infty[$.

6. (3 pts) Pour tout $x \in\ ]2;+\infty[$, on a trouvé que :

$$f''(x) = g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

Or cette dérivée seconde est négative sur $]2;4]$ puis positive sur $[4;+\infty[$, donc f est concave sur $]2;4]$ puis convexe sur $[4;+\infty[$. Son point d'inflexion a pour abscisse 4 et pour ordonnée : $f(4) = 4\ln(4-2) = 4\ln 2$.

7. (2 pts) On cherche des valeurs de x telles que $\underline{f'(x) = 3}$, c'est-à-dire $g(x) = 3$.

Or d'après le tableau de variation de g dressé en question **5c,** le minimum de g est $2 + \ln(2) \approx 2{,}69$ qui est inférieur à 3, et g tend vers $+\infty$ en 2 et en $+\infty$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions (on pourrait appliquer le TVI pour le démontrer). Il existe donc deux valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3.

Exercice 2 — 12 points

1. (2 pts) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonées $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonées $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. **Faux.**

2. (1 pt) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$ trouvé précédemment. Les droites ne sont donc pas parallèles. **Faux.**

3. (2 pts) On cherche à déterminer t : $\begin{cases}4 = t\\-2 = -2 + 3t\\2 = 1 - 3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 = t\\0 = 3t\\1 = -3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 4\\t = 0\\t = -\frac{1}{3}\end{cases}$

On aboutit à des contradictions, donc C n'appartient pas à (d). **Faux.**

4. (3 pts) Si (d) et (d') sont sécantes, alors il existe t et k réels tels que :

$$\begin{cases}t = -2 + 3k\\-2 + 3t = k\\1 - 3t = -2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -2 + 3k\\-2 + 3(-2 + 3k) = k\\1 - 3(-2 + 3k) = -2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -2 + 3k\\-8 + 9k = k\\7 - 9k = -2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -2 + 3k\\k = 1\\k = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 1\\k = 1\\k = 1\end{cases}$$

Il n'y a pas de contradiction, on trouve une seule valeur de t et k qui convient. (d) et (d') sont sécantes. **Vrai.**

5. (4 pts) Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonées $\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix}$. Soient deux réels a et b.

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4 = -a + 2b\\3 = 3a - b\\8 = a + 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -4 + 2b\\3 = 3(-4 + 2b) - b\\8 = (-4 + 2b) + 2b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = -4 + 2b\\3 = -12 + 5b\\8 = -4 + 4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -4 + 2b\\b = 3\\b = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\b = 3\\b = 3\end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Donc le point D appartient au plan (ABC). **Vrai.**

Exercice 3 **20 points**

1a. (1 pt) $u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 3 = 12$.

1b. (2 pts) $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 53$.

1c. (2 pts) La suite semble croissante et avoir pour limite $+\infty$.

2a. (4 pts) Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ alors que $0 + 1 = 1$. On a bien $u_0 \geq 0 + 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq n + 1$. Montrons que $u_{n+1} \geq n + 2$. D'après l'hypothèse :

$u_n \geq n + 1 \Leftrightarrow 5u_n \geq 5(n + 1) \Leftrightarrow 5u_n - 4n \geq 5n + 5 - 4n \Leftrightarrow 5u_n - 4n - 3 \geq n + 5 - 3 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq n + 2$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n + 1$.

2b. (2 pts) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$. Or $u_n \geq n + 1$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3a. (3 pts) Soit $n \in \mathbb{N}$. Essayons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) - 1 = 5u_n - 4n - 3 - n - 2 = 5u_n - 5n - 5 = 5(u_n - n - 1) = 5v_n$.

Donc v_n est géométrique de raison 5. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2$.

3b. (1 pt) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 5^n$.

3c. (1 pt) $v_n = u_n - n - 1 \Leftrightarrow u_n = v_n + n + 1 \Leftrightarrow u_n = 2 \times 5^n + n + 1$

3d. (2 pts) La suite géométrique d'expression $v_n = 2 \times 5^n$ est de raison supérieure à 1 et de premier terme positif, donc croissante. Idem pour la suite d'expression $(n + 1)$.

On pouvait aussi déterminer le signe de

$$u_{n+1} - u_n = (2 \times 5^{n+1} + n + 2) - (2 \times 5^n + n + 1)$$
$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n + 1$$
$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^n(5 - 1) + 1$$
$$u_{n+1} - u_n = 8 \times 5^n + 1$$

cette expression étant bien positive pour tout $n \in \mathbb{N}$

(u_n) étant une somme de suites croissantes, elle est donc croissante.

4a. (1 pt)

```
def suite() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 10000000 :
    u = 5*u - 4*n - 3
    n = n + 1
  return n
```

ou

```
def suite() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 10**7 :
    u = 2*5**n + n + 1
    n = n + 1
  return n
```

4b. (1 pt) Le programme renvoie 10.

Exercice 4 **24 points**

A1. (3 pts) La fonction g admet pour dérivée :

$$g'(x) = e^x - (1 \times e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$$

Cette dérivée est du signe de $-x$, c'est-à-dire positive sur $]-\infty; 0]$ puis négative sur $[0; +\infty[$.
Donc g est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$.

A2. (4 pts)

• En $+\infty$, on factorise par e^x : $g(x) = e^x\left(1 - x + \frac{1}{e^x}\right)$.
La parenthèse tend vers $-\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• En $-\infty$, on sait d'après les croissances comparées que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
Ainsi, par somme, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

A3. (4 pts) g est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$, elle admet pour maximum $g(0) = e^0 - 0 \times e^0 + 1 = 2$. Nous allons donc appliquer le TVI sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
g est continue, strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
On a $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, or 0 appartient à l'intervalle $]-\infty; 2]$.
Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
On a $\alpha \approx 1{,}28$.

A4. (1 pt) On en déduit que $g(x)$ est positif sur $]-\infty; \alpha]$ puis négatif sur $[\alpha; +\infty[$.

A5. (2 pts)

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha e^\alpha = -1 \Leftrightarrow e^\alpha(1-\alpha) = -1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{-1}{1-\alpha} \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

B1a. (1 pt) Le rectangle a pour dimensions x et $f(x)$. Ainsi :

$$\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

B1b. (2 pts) On dérive $\mathcal{A}$ comme un quotient :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x + 4 - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

On constate bien que $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $g(x)$.

B1c. (1 pt) D'après la question 4 de la partie A, $g(x)$ est positif sur $]-\infty; \alpha]$ puis négatif sur $[\alpha; +\infty[$.
Donc $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

B2. (2 pts) On en déduit que le maximum de $\mathcal{A}$ sur $[0; +\infty[$ est atteint en α.
L'aire maximale est $\mathcal{A}(\alpha) \approx \mathcal{A}(1{,}28) \approx 1{,}11$.

B3. (4 pts) Déterminons le coefficient directeur de la droite (PQ). On a $P(\alpha; 0)$ et $Q\big(0; f(\alpha)\big)$ donc le coefficient directeur de la droite (PQ) est :

$$\frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = \frac{\frac{4}{e^\alpha + 1}}{-\alpha} = -\frac{4}{\alpha(e^\alpha + 1)}$$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{ainsi} \quad f'(\alpha) = -\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$$

Or d'après la question 5 de la partie A, $e^\alpha = \frac{1}{(\alpha - 1)}$.

$$f'(\alpha) = -\frac{4\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{(e^\alpha+1)(e^\alpha+1)} = -\frac{4}{(\alpha-1)\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)(e^\alpha+1)} = -\frac{4}{(1+\alpha-1)(e^\alpha+1)} = -\frac{4}{\alpha(e^\alpha+1)}$$

On retrouve bien le coefficient directeur de (PQ). Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite (PQ).