Lycée Colbert

Baccalauréat général blanc
Session 2026

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : **4 heures**

Ce sujet comporte 4 pages.

Le sujet est composé de **quatre exercices indépendants**.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

L'usage de la **calculatrice avec mode examen** actif est autorisé.
L'usage de la **calculatrice sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut **admettre un résultat précédemment donné** dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à **faire figurer sur la copie toute trace de recherche**, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

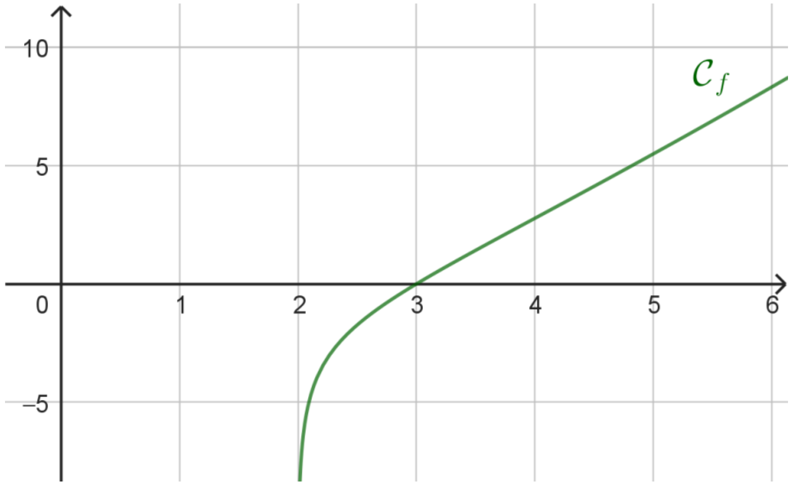
Si le candidat pense repérer une **erreur dans le sujet**, il le signale sur sa copie, en précisant les hypothèses qu'il a alors été amené à faire.
Il en sera tenu compte dans la correction.

Exercice 1 (6 pts)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2)$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f, ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$ sur $]2;+\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1 ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]2;+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$, c'est-à-dire :

$$g(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$$

a. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2;+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

c. En déduire le tableau de variations complet de la fonction g.
On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2;+\infty[$, $g(x) > 0$.

e. En déduire le sens de variations de la fonction f sur $]2;+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2;+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 2 (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(2;-1;0)$; $B(1;2;1)$ et $C(4;-2;2)$ ainsi que les droites (d) et (d') de représentation paramétrique $(d):\begin{cases} x = t \\ y = -2+3t \\ z = 1-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d'):\begin{cases} x = -2+3k \\ y = k \\ z = -2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.
Affirmation 2 : les droites (AB) et (d) sont parallèles.
Affirmation 3 : le point C appartient à (d).
Affirmation 4 : les droites (d) et (d') sont sécantes.
Affirmation 5 : le point $D(6;2;8)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 3 (5 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n+1$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite(v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.
b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python, et destinée à renvoyer le plus petite entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
  u = 3
  n = 0
  while ... :
    u = ...
    n = n + 1
  return n
```

<u>Exercice 4</u> (6 pts)

Partie A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Étudier les variations de g.

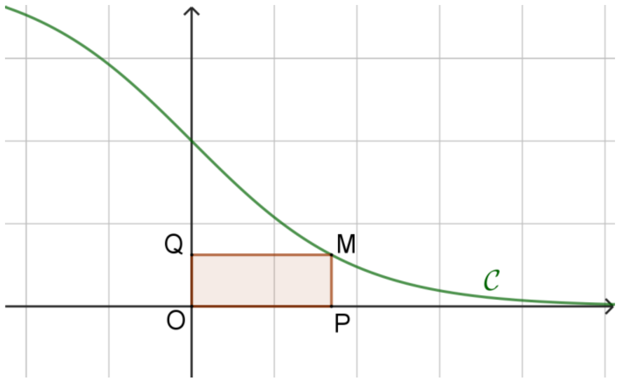
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ en justifiant.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Donner une valeur approchée de α au centième.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{(\alpha - 1)}$.



Partie B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.

Pour tout M, point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x positive, on note P, le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et Q, le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. Soit $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout $x \in [0\,; +\infty[$ associe l'aire du rectangle $MPOQ$.

a. Justifier que pour tout x réel positif :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

b. Démontrer que pour tout x réel positif, $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $g(x)$.

c. En déduire les variations de $\mathcal{A}$ sur $[0; +\infty[$.

2. Montrer que l'aire du rectangle $MPOQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

En utilisant la question 3 de la partie A, déterminer une valeur approchée au centième de cette aire maximale.

3. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite (PQ).