

Correction du sujet de Bac blanc 2025

Exercice 1

20 points

1a. (1 pt) On remarque d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 2x = -\infty$ par somme.

(1 pt) De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1b. (1 pt) On en déduit que C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2a. (2 pts) Si $u(x) = -x^2 - 2x$, alors $u'(x) = -2x - 2$. Ainsi :

$$f'(x) = (-2x - 2)e^{-x^2 - 2x} = -2(x + 1)e^{-x^2 - 2x}$$

2b. (2 pts) Le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $(x + 1)$.

Donc $f'(x)$ est positif sur $] -\infty; -1]$ puis négatif sur $[-1; +\infty[$.

(1 pt) Ainsi f est croissante sur $] -\infty; -1]$ puis décroissante sur $[-1; +\infty[$.

(1 pt) Le maximum de f est $f(-1) = e^{-(-1)^2 - 2 \times (-1)} = e^{-1+2} = e$

3a. (3 pts) On dérive à nouveau f , cette fois comme un produit.

On pose $u(x) = -2(x + 1)$ et donc $u'(x) = -2$, et $v(x) = e^{-x^2 - 2x}$ donc $v'(x) = (-2x - 2)e^{-x^2 - 2x}$.

$$f''(x) = -2e^{-x^2 - 2x} + -2(x + 1)(-2x - 2)e^{-x^2 - 2x}$$

$$f''(x) = e^{-x^2 - 2x}(-2 + 4x^2 + 4x + 4x + 4)$$

$$f''(x) = e^{-x^2 - 2x}(4x^2 + 8x + 2)$$

3b. (3 pts) Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $(4x^2 + 8x + 2)$ qui est un polynôme du second degré.

Son discriminant est $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times 2 = 32$ et donc ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{32}}{2 \times 4} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{32}}{2 \times 4} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, f est concave sur l'intervalle :

$$\left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

4a. (1 pt) La dérivée de f s'annule en -1 , donc C_f admet une tangente horizontale en -1 .

4b. (2 pts) On calcule d'abord $f(0) = e^{-0^2 - 2 \times 0} = e^0 = 1$ et $f'(0) = -2(0 + 1)e^{-0^2 - 2 \times 0} = -2e^0 = -2$

L'équation de (T) est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -2x + 1$$

4c. (2 pts) D'après **3b**, f est convexe sur $[0; +\infty[$.

Donc sur cet intervalle, la courbe C_f est au-dessus de la tangente (T) .

Exercice 2

20 points

Proposition 1 (3 pts)

$$\begin{cases} -6 = 2t \\ -2 = 1 + t \\ -14 = -5 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -6 \\ t = -3 \\ 3t = -9 \end{cases}$$
 et ces trois équations fournissent $t = -3$, donc M est le point de (d) de paramètre -3 . Vrai.

Proposition 2 (3 pts)

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ($\frac{2}{2} \neq -\frac{1}{1}$) donc (d) et (AB) ne sont pas parallèles. Faux.

Proposition 3 (4 pts)

(AB) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = -t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

Cherchons un éventuel point d'intersection de (d) et (AB) : $\begin{cases} 2t = 1 + 2t' \\ 1 + t = 1 - t' \\ -5 + 3t = -t' \end{cases}$

La deuxième équation fournit $t = -t'$. Ainsi : $\begin{cases} 2(-t') = 1 + 2t' \\ t = -t' \\ -5 + 3(-t') = -t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' = -1 \\ t = -t' \\ 2t' = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\frac{1}{4} \\ t = -t' \\ t' = -\frac{5}{2} \end{cases}$

On aboutit à une contradiction, donc (AB) et (d) sont non-coplanaires. Faux.

Proposition 4 (4 pts)

Le vecteur $\overrightarrow{AN}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 11-1 \\ -1-1 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Essayons de déterminer s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{AN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

L'égalité $\overrightarrow{AN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ devient : $\begin{cases} 10 = 2a + 6b \\ -2 = -a \\ -4 = -a - 2b \end{cases}$

La deuxième égalité fournit $a = 2$. Ainsi :

$$\begin{cases} 10 = 2 \times 2 + 6b \\ a = 2 \\ -4 = -2 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ainsi, on trouve $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et N sont coplanaires. Vrai.

Proposition 5 (3 pts)

On doit avoir $4x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2,5$. Donc f n'est définie que sur $[2,5; +\infty[$. Faux.

Proposition 6 (3 pts)

On pose $u(x) = 4x - 10$ et ainsi $u'(x) = 4$. La dérivée de $f = \sqrt{u}$ a pour expression :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4}{2\sqrt{4x-10}} = \frac{2}{\sqrt{4x-10}}$$

En simplifiant par 2, on retrouve la bonne expression. Vrai.

Exercice 3

20 points

A1. (2 pts)

$$u_1 = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = -2 + 6 - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} + \frac{12}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{60}{8} - \frac{12}{8} = \frac{23}{8}$$

A2. (1 pt) $u_3 \approx 2,99219$

A3. (1 pt) La suite (u_n) semble croissante et convergente vers 3.

B1. (1 pt) $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

B2. (2 pts) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule v_{n+1} et au vu de la réponse attendue, on essaye de factoriser par $-\frac{1}{2}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 = -\frac{1}{2}v_n^2$$

B3. (3 pts) Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 = -1$ donc on a bien $-1 \leq v_0 \leq 0$.

Hérédité : supposons que $-1 \leq v_n \leq 0$.

Alors $1 \geq v_n^2 \geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $[-1; 0]$.

Ensuite $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$, donc $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.

B4a. (1 pt) La présence du $\frac{1}{2}$ nous invite à utiliser la question 2.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

B4b. (2 pts) D'après 3, v_n est négatif donc $-v_n$ est positif.

Par contre, comme $-1 \leq v_n \leq 0$, on a $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$, donc $\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$ est positif.

Ainsi $v_{n+1} - v_n$ est positif. La suite (v_n) est croissante.

B4c. (1 pt) (v_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge.

B5a. (2 pts) (v_n) est convergente et la fonction de récurrence de (v_n) définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ est continue, donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, soit $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

B5b. (2 pts)

$$\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell\left(\frac{1}{2}\ell + 1\right) = 0$$

Cette équation produit nul admet deux solutions : $\ell = 0$ ou $\ell = -2$.

Or pour tout n entier naturel, $-1 \leq v_n \leq 0$, donc ℓ ne peut pas être égal à -2 . Ainsi $\ell = 0$.

B6. (2 pts) On a pour tout n entier naturel, $u_n = v_n + 3$.

Or (v_n) est croissante donc (u_n) aussi, et v_n converge vers 0 donc u_n converge vers $0 + 3 = 3$.

Les conjectures sont vérifiées.

Exercice 4

20 points

A1. (1 pt) g a pour dérivée $g'(x) = e^x - 1$.

(1 pt) Il faut étudier le signe de cette expression. Or $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$ et pour x positif, e^x est toujours supérieur ou égal à 1. Donc $g'(x)$ est négatif sur $] -\infty ; 0]$ puis positif sur $[0 ; +\infty[$.

(1 pt) Ainsi, g est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Son minimum est $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

A2. (1 pt) Le minimum de g est 0, donc g est positive sur tout son ensemble de définition.

A3. (1 pt) On en déduit que pour tout x réel, $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$.

Ceci prouve que pour tout x réel, $e^x - x$ est strictement positif.

B1. (1 pt) On factorise par x :

$$f(x) = \frac{x \times 1}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

(1 pt) En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées.

(1 pt) Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(1 pt) En $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ par quotient. À nouveau par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

B2. (2 pts) On en déduit que la courbe C_f admet deux asymptotes horizontales.

Leurs équations sont $y = 0$ et $y = -1$.

B3. (3 pts)

$$f'(x) = \frac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

B4. (1 pt) Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $(1 - x)$.

Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $] -\infty ; 1]$ puis négatif sur $[1 ; +\infty[$.

(1 pt) f est donc croissante sur $] -\infty ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; +\infty[$. Son maximum est :

$$f(1) = \frac{1}{e^1 - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

B5a. (3 pts) f est continue, strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

On a $f(1) = \frac{1}{e-1} > 0,1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, or 0,1 appartient à l'intervalle $[0,1; \frac{1}{e-1}]$.

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$.

B5b. (1 pt) On obtient $\alpha \approx 3,71$.