Lycée Colbert

Baccalauréat général blanc
Session 2025

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : **4 heures**

Ce sujet comporte 4 pages.

Le sujet est composé de **quatre exercices indépendants**.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

L'usage de la **calculatrice avec mode examen** actif est autorisé.
L'usage de la **calculatrice sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut **admettre un résultat précédemment donné** dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à **faire figurer sur la copie toute trace de recherche**, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Si le candidat pense repérer une **erreur dans le sujet**, il le signale sur sa copie, en précisant les hypothèses qu'il a alors été amené à faire.
Il en sera tenu compte dans la correction.

Exercice 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2-2x}$

1. **a.** Démontrer, en justifiant soigneusement, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

Pour la suite, on admettra que la limite de f en $-\infty$ est également 0.

2. **a.** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2(x+1)e^{-x^2-2x}$$

b. Dresser le tableau de variations de f. On fera figurer les limites et la valeur exacte de l'extremum.

3. **a.** Déterminer l'expression de la dérivée seconde de f et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = e^{-x^2-2x}(4x^2 + 8x + 2)$$

b. En déduire l'intervalle sur lequel f est concave.

4. **a.** La courbe C_f admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.

b. Déterminer l'équation de (T), tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, quelle est la position relative de (T) et de la courbe C_f ? Justifier.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour les **propositions 1 à 4**, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

On donne les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$.

Proposition 1 Le point $M(-6; -2; -14)$ appartient à la droite (d).

Proposition 2 Les droites (AB) et (d) sont parallèles.

Proposition 3 Les droites (AB) et (d) sont sécantes.

Proposition 4 Le point $N(11; -1; -4)$ appartient au plan (ABC).

Pour les **propositions 5 à 6**, on considère la fonction f dont l'expression est :

$$f(x) = \sqrt{4x - 10}$$

Proposition 5 La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$.

Proposition 6 La fonction f admet pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 10}}$$

Exercice 3 **5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A : conjecture

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3.

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3$.

1. Calculer v_0.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}{v_n}^2$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.

4. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

c. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

a. Expliquer pourquoi $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

b. Déterminer alors la valeur de ℓ.

6. Les conjectures de la partie A sont-elles validées ?

Exercice 4 **5 points**

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Le but de la partie A est de montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel.

3. Montrer alors que pour tout réel x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B : étude de la fonction *f*

D'après la partie A, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Montrer que pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On calculera la valeur exacte de son maximum.

5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.