

Lycée Colbert

Baccalauréat général blanc Session 2024

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages.

Le sujet est composé de **quatre exercices indépendants**.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

L'usage de la **calculatrice avec mode examen** actif est autorisé.

L'usage de la **calculatrice sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut **admettre un résultat précédemment donné** dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à **faire figurer sur la copie toute trace de recherche**, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Si le candidat pense repérer une **erreur dans le sujet**, il le signale sur sa copie, en précisant les hypothèses qu'il a alors été amené à faire.

Il en sera tenu compte dans la correction.

Exercice 1

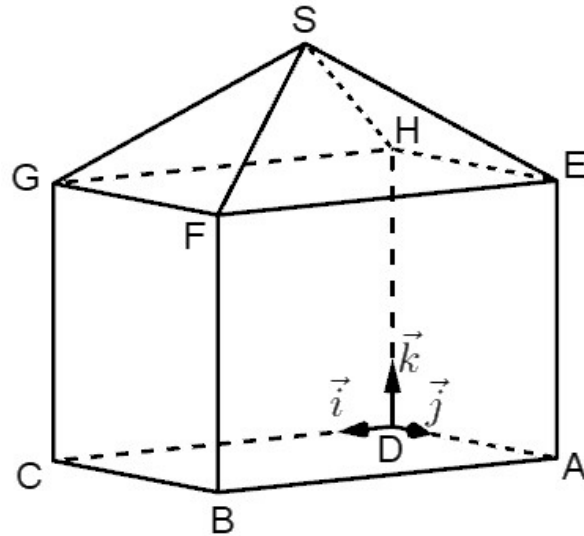
3 points

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$.

On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

Soient les points I, J et K tel que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.

En notant $\vec{i} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{DJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$, on se place dans le repère orthonormé $(D; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.



On admet que le point S a pour coordonnées $(3; 2; 6)$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G .
2. Démontrer que le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le septième du volume total de la maison. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$$

3.
 - a. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BS}$.
 - b. En déduire une représentation paramétrique de la droite (BS) .
4. On admet que la droite (AF) admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite (d) ,

admettant pour représentation paramétrique $(d): \begin{cases} x = -4 + s \\ y = 8 - 2s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$

- a. Justifier que les droites (d) et (AF) ne sont pas parallèles.
- b. La trajectoire de l'oiseau va-t-elle couper la droite (AF) ?

Exercice 2

5 points

Au début de l'année 2024, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2024 + n)$.

- Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2025.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

- Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
- Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - Démontrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n ,
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- On considère l'algorithme ci-contre :
 - Expliquer ce que renvoie `seuil(70)` dans le contexte de l'exercice.
 - L'exécution de `seuil(100)` échoue.
Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

```
def seuil(p):  
    n = 0  
    u = 40  
    while u < p :  
        n = n + 1  
        u = 0.008*u*(200-u)  
    return (n+2024)
```

Exercice 3

7 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 - La courbe représentative de f admet-elle une ou plusieurs asymptotes ?
Si oui, donner leur(s) équation(s).
- Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 e^x - 1$
 - Déterminer la dérivée g' de la fonction g .
 - Justifier alors que g est croissante sur $[0; +\infty[$.
 - Calculer la valeur exacte de $g(0)$ et $g(1)$.
 - Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.
 - Donner une valeur approchée au millièmè du réel α .
- Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- En déduire, en utilisant la question 2, les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 - Démontrer que $m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$ est le minimum de f .
 - Donner une valeur approchée de m au centièmè près.
- Démontrer que f est une fonction convexe sur $]0; +\infty[$.
 - Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 1.
 - En déduire que pour tout $x > 0$, on a $f(x) \geq x(e - 1) + 2$.

Exercice 4

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On peut affirmer que :

- a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$
c. la suite (u_n) n'a pas de limite d. la suite (u_n) converge

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

- a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale
b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale
c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale
d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

3. On considère la fonction h définie sur $[2; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

La dérivée de cette fonction est la fonction h' définie sur $]2; +\infty[$ par :

- a. $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ b. $h'(x) = \sqrt{2x}$ c. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}}$ d. $h'(x) = 2x\sqrt{x^2 - 4}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2+1}$

Parmi ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$, laquelle admet f pour dérivée ?

- a. $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^{x^2+1}$ b. $F_2(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2+1}$ c. $F_3(x) = e^{x^2+1}$ d. $F_4(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$

5. On considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $] -\infty; 2]$. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de sa **fonction dérivée** f' .

On peut affirmer que :

- a. f est concave sur $] -\infty; 2]$
b. f est concave sur $[-2; 1]$
c. f est convexe sur $] -\infty; 0]$
d. f est convexe sur $[-2; 1]$

