

Correction du sujet de Bac blanc 2023

Exercice 1

28 points

Partie A

1. (1 pt) On injecte 1 mg de médicament, le patient en élimine 10%, il en reste donc 0,9 mg.

Puis il reçoit une dose de 0,25 mg.

Ainsi, au bout de 30 minutes, le patient a $0,9 + 0,25 = 1,15$ mg de médicament dans le sang.

2. (1 pt) Toutes les 30 minutes, la quantité de médicament diminue de 10%, elle est multipliée par 0,9.

Puis, on rajoute 0,25 mg de médicament. Cela correspond bien à la formule proposée.

3a. (1 pt) Initialisation : On a $u_0 = 1$ et on a calculé $u_1 = 1,15$ précédemment. On a bien $u_0 \leq u_1 < 5$.

(2 pts) Hérédité : soit n entier naturel, supposons que $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

On a alors $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$

soit $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 4,5 + 0,25$

et ainsi $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 4,75 < 5$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

3b. (2 pts) La suite (u_n) est croissante et majorée par 5, donc elle converge.

4a. (2 pts)

```
def efficace() :  
    u = 1  
    n = 0  
    while u < 1.8 :  
        u = 0.9 * u + 0.25  
        n = n + 1  
    return n
```

4b.

(1 pt) Le script renvoie 8, ce qu'on peut tester aussi à la calculatrice.

(1 pt) Cela signifie que le médicament est efficace au bout de 8 périodes de 30 minutes, soit 4 heures.

5a. (2 pts) Soit n entier naturel. Alors :

$$v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25) = 2,25 - 0,9u_n = 0,9(2,5 - u_n) = 0,9v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

(1 pt) et de premier terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.

5b.

(1 pt) D'après 5a, $v_n = 1,5 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n .

(1 pt) Ainsi, $u_n = 2,5 - v_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

5c.

(1 pt) (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9, comprise entre -1 et 1. Ainsi, sa limite est 0.

(1 pt) Comme $u_n = 2,5 - v_n$, la limite de la suite (u_n) est 2,5. Le traitement ne présente pas de risque.

Partie B 1. (1 pt) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ par composition, donc par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2,5$.

2. (1 pt) Pour tout t positif, $f'(t) = -1,5 \times (-0,2)e^{-0,2t} = 0,3e^{-0,2t}$.

(1 pt) La fonction exponentielle étant positive, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3a. (3 pts) f est continue, strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2,5$ et $1 < 1,8 < 2,5$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,8$ admet une unique solution α .

3b. (1 pt) On obtient $\alpha \approx 3,811$.

3c. (1 pt) $0,811 \times 60 \approx 49$, donc le médicament devient efficace au bout de 3 heures et 49 minutes.

4.

(1 pt) Pour tout t positif, $f''(t) = 0,3 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -0,06e^{-0,2t}$.

(1 pt) Cette fonction étant négative sur son ensemble de définition, f est concave sur $[0; +\infty[$.

Exercice 2**16 points****Partie A**

1. (1 pt) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2 pts) Avec le point A , on trouve $(AB) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. (2 pts) On tente de résoudre le système $\begin{cases} -3 = 1 + t \\ 1 = 1 \\ 6 = 2 - t \end{cases}$ et on trouve $t = -4$ pour la première et la dernière égalité. Donc le point $M(-3; 1; 6)$ appartient à (d) .

3. (1 pt) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

(AB) et (d) ne sont donc pas parallèles.

(3 pts) Soient t et t' réels. On résout :

$$\begin{cases} 2 - t = 1 + t' \\ 3 - 3t = 1 \\ -1 - t = 2 - t' \end{cases}$$

La deuxième équation fournit $t = \frac{2}{3}$.

Ensuite, la première équation donne $2 - \frac{2}{3} = 1 + t'$ soit $t' = \frac{1}{3}$,

mais la dernière équation donne $-1 - \frac{2}{3} = 2 - t'$ soit $t' = \frac{11}{3}$.

On aboutit à une contradiction, donc (AB) et (d) ne sont pas sécantes. Elles sont non coplanaires.

Partie B

1. (1 pt) $F(1; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$.

(1 pt) $P(\frac{1}{3}; 0; 0)$ et $Q(0; \frac{2}{3}; 0)$.

2. (2 pts, - 1 pt par erreur) $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EQ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PF} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3a. (2 pts) On trouve $\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EQ}$, donc ces vecteurs ne forment pas une base de l'espace.

3b. (1 pt) Le plan (EGQ) est défini par le point E et les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EQ}$. Le vecteur $\overrightarrow{PF}$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs, donc la droite (PF) est parallèle au plan (EGQ) .

Exercice 3**20 points**

1. d

2. b

3. c

4. c

5. b

Partie A

1. (1 pt) En $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty$ par somme.

(2 pts) En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée, mais pour x non nul, $h(x) = x(\frac{e^x}{x} - 1)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

2.

(1 pt) Pour tout x , $h'(x) = e^x - 1$.

(1 pt) Cette fonction est négative sur $] -\infty; 0]$ puis positive sur $[0; +\infty[$.

(1 pt) Donc h est décroissante sur $] -\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$.

3. (1 pt) Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

h étant croissante sur $[0; +\infty[$, on a $h(a) < h(b)$ et donc $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B

1. (2 pts) On a $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$, donc la tangente T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$.

2. (2 pts) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ par composition.

Ainsi, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

3a. (2 pts) Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 \right) - \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1 \right) \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) - 1 + 1 \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \\ &= h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

3b. (2 pts) D'après la question A3, $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n , donc (u_n) est décroissante.

4. (1 pt) D'après le tableau, on trouve $n = 8$.