

Lycée Colbert

Baccalauréat général blanc

Session 2023

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages.

Le sujet est composé de **quatre exercices indépendants**.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

L'usage de la **calculatrice avec mode examen** actif est autorisé.

L'usage de la **calculatrice sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut **admettre un résultat précédemment donné** dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à **faire figurer sur la copie toute trace de recherche**, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Si le candidat pense repérer une **erreur dans le sujet**, il le signale sur sa copie, en précisant les hypothèses qu'il a alors été amené à faire.

Il en sera tenu compte dans la correction.

Les parties A et B sont indépendantes.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def efficace():
    u = 1
    n = 0
    while ..... :
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
 - c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$, par :

$$f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1,8$ admet une unique solution α .
b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
c. On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
A partir de combien de temps, en heures et minutes, le médicament devient-il efficace ?
4. Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 2**4 points****Les parties A et B sont indépendantes.****Partie A**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2; 3; -1)$ et $B(1; 0; -2)$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

On considère également la droite (d) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer si le point $M(-3; 1; 6)$ appartient à (d) .
3. Déterminer en justifiant, la position relative des droites (AB) et (d) .

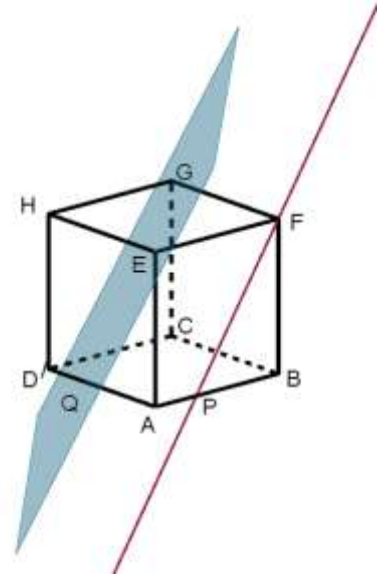
Partie B

Dans un cube $ABCDEFGH$, on se place dans le repère orthonormé $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

On considère les points P et Q tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

1. Donner les coordonnées des points F, G, P et Q .
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EQ}$ et $\overrightarrow{PF}$.
3. a. Démontrer que ces vecteurs ne forment pas une base de l'espace.
b. En déduire la position relative de la droite (PF) et du plan (EGQ) .

**5 points****Exercice 3**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

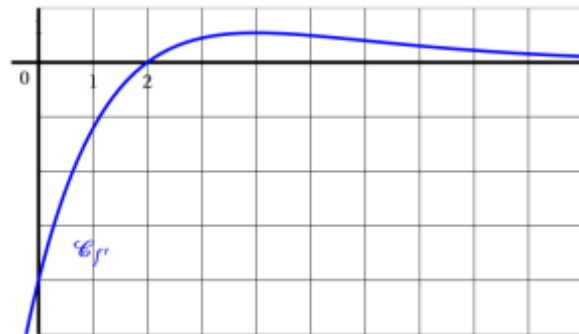
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$.
Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :
a. 0 b. 1 c. 2 d. 3
2. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est :
a. $y = ex + e$ b. $y = 2ex - e$ c. $y = 2ex + e$ d. $y = ex$
3. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$$

admet pour asymptote la droite d'équation :
a. $x = -2$ b. $x = -1$ c. $y = -2$ d. $y = -1$

4. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}_f'$ de la **fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On peut affirmer que la fonction f est :

- a. concave sur $]0 ; +\infty[$
- b. convexe sur $]0 ; +\infty[$
- c. convexe sur $[0; 4]$
- d. convexe sur $[2; +\infty[$



5. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$

On peut alors affirmer que :

- a. la suite (u_n) diverge
- b. la suite (u_n) converge
- c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 4

4 points

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^x - x$$

- Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier les variations de la fonction h et dresser son tableau de variation.
- En déduire que :

si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$ avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la **partie A**.

- b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

- Le tableau ci-contre donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n) . Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

n	u_n
1	0,718281828
2	0,148721271
3	0,062279092
4	0,034025417
5	0,021402758
6	0,014693746
7	0,010707852
8	0,008148453
9	0,006407958
10	0,005170918