

Correction du bac blanc

Chaque exercice est noté sur 20 points, la notation sur 80 obtenue est ensuite ramenée à 20.

Exercice 1

1. (1 pt) On a $u_0 = 3\,000$. Il faut additionner 80 puis enlever 5% de cette somme

On obtient $u_1 = (3\,000 + 80) \times 0,95 = 3\,080 \times 0,95 = 2\,926$.

2. (1 pt) Chaque année, 80 cétacés arrivent, puis l'effectif baisse de 5%.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = 0,95u_n + 80 \times 0,95 = 0,95u_n + 76$

3. (1 pt) On peut entrer « = B2 * 0.95 + 76 »

4. a. (2 pts) On le démontre par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 3\,000 \geq 1\,520$.

Hérédité : Soit n entier naturel, supposons que $u_n \geq 1\,520$.

Alors on a bien $0,95u_n \geq 0,95 \times 1\,520 \Leftrightarrow 0,95u_n + 76 \geq 1\,444 + 76 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq 1\,520$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,520$.

b. (2 pts) On peut le faire de nouveau par récurrence, mais aussi de la façon suivante :

Soit n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = 76 - 0,05u_n$

Or $u_n \geq 1\,520 \Rightarrow -0,05u_n \leq -76 \Rightarrow 76 - 0,05u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

c. (1 pt) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 520, elle est donc convergente.

5. a. (2 pts) Soit n entier naturel, on calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,520 = 0,95u_n + 76 - 1\,520 = 0,95u_n - 1\,444 = 0,95(u_n - 1\,520) = 0,95v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

(1 pt) Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1\,520 = 3\,000 - 1\,520 = 1\,480$.

b. (2 pts) On en déduit que pour tout entier naturel n , $v_n = 1\,480 \times 0,95^n$

Or $v_n = u_n - 1\,520$, donc $u_n = v_n + 1\,520 = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$

c. (2 pts) On a $-1 < 0,95 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,520$.

6. (2 pts)

$n \leftarrow 0$
 $u \leftarrow 3\,000$
Tant que $u \geq 2\,000$
 $n \leftarrow n + 1$
 $u \leftarrow u * 0.95 + 76$
Fin de Tant que

7. (1 pt) La réserve fermera, car la limite de la suite est inférieure à 2 000.

(2 pts) On calcule les termes de la suite, avec l'algorithme ou un tableau de valeurs, pour trouver que l'indice du premier terme inférieur à 2 000 est 22. La réserve fermera donc en $2017 + 22 = 2039$.

Exercice 2

Partie A

1. (2 pts) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2; 1; 0)$. En utilisant le point A , on en déduit la représentation

paramétrique de (AB) : $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. a. (2 pts) D'après sa représentation paramétrique, la droite D a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; -1)$.

Or $1 \times (-2) = -2$ mais $-1 \times (-2) \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, D et (AB) ne sont pas parallèles.

b. (3 pts) Soient t et t' deux réels.

$$\begin{cases} -2 + t = -2t' \\ 1 + t = 1 + t' \\ -1 - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = t' \\ t = 0 \end{cases}$$

On aboutit à une contradiction, donc (AB) et D ne sont pas sécantes. Elles sont donc non coplanaires.

Partie B

1. (2 pts) (LM) et (BD) sont respectivement incluses dans les plans (FGH) et (BCD) , qui sont deux faces opposées d'un cube. Elles sont donc parallèles.

2. (4 pts) Nous allons utiliser $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$.

F a pour coordonnées $(6; 0; 6)$ et E a pour coordonnées $(0; 0; 6)$, donc $\overrightarrow{FE}(-6; 0; 0)$

$$\begin{cases} x_L - x_F = \frac{2}{3} \times (-6) \\ y_L - y_F = \frac{2}{3} \times 0 \\ z_L - z_F = \frac{2}{3} \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = -4 + 6 \\ y_L = 0 + 0 \\ z_L = 0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 2 \\ y_L = 0 \\ z_L = 6 \end{cases}$$

On trouve bien que L a pour coordonnées $(2; 0; 6)$.

3. a. (3 pts) B a pour coordonnées $(6; 0; 0)$ donc $\overrightarrow{BL}(-4; 0; 6)$

On en déduit une représentation paramétrique de la droite (BL) : $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. (4 pts) S est le point d'intersection de (BL) et (AK) .

Or (AK) passe par $A(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AK}(0; 0; 1)$.

Sa représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Soient t et t' réels, on résout le système :

$$\begin{cases} 0 = 6 - 4t \\ 0 = 0 \\ t' = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,5 \\ t' = 9 \end{cases}$$

Ainsi, S est le point de (AK) de paramètre 9, il a pour coordonnées $(0; 0; 9)$.

Exercice 3

1. a. (2 pts) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées.

b. (2 pts) Il s'agit de montrer que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

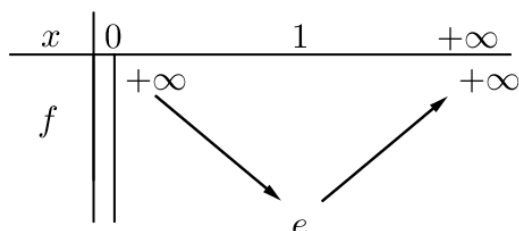
$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$, ce qui montre le résultat.

2. (2 pts) On applique la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

3. (3 pts) Pour tout x réel, e^x est positif et x^2 aussi, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$.

On établit le tableau de variations, en remarquant que $f(1) = e$:



4. (3 pts) f est continue sur $]0; +\infty[$.

Elle est strictement décroissante sur $]0; 1]$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = e$.

Elle est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. $f(1) = e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

L'équation $f(x) = m$ a deux solutions si $m > e$, une solution si $m = e$ et aucune solution si $m < e$.

5. a. (3 pts) La tangente à C_f en a est parallèle à Δ si et seulement si son coefficient directeur est -1 , autrement dit si $f'(a) = -1$. Or :

$$f'(a) = \frac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \Leftrightarrow e^a(a-1) = -a^2 \Leftrightarrow e^a(a-1) + a^2 = 0$$

b. (3 pts) On applique la dérivée d'un produit, pour x strictement positif,

$$g'(x) = e^x(x-1) + e^x + 2x = xe^x + 2x$$

Or x est strictement positif, donc xe^x aussi, et $2x$ également. Donc $g'(x)$ est positif sur $]0; +\infty[$ et g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$ et par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

c. (2 pts) D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique nombre a tel que $g(x) = 0$.

Ainsi, l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$ a une unique solution : il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ .

Exercice 4

Partie A

1. (3 pts) Comme la courbe C_f passe par le point $A(0; 0,5)$, on en déduit que $f(0) = 0,5$. Ainsi :

$$f(0) = \frac{a}{1 + e^{-b \times 0}} = \frac{a}{1 + 1} = \frac{a}{2} = 0,5$$

d'où $a = 0,5 \times 2 = 1$.

2. (2 pts) On applique la formule de la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{-(-b) \times e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

3. (3 pts) La tangente passe par $B(10; 1)$ et par $A(0; 0,5)$. Son coefficient directeur est donc :

$$\frac{1 - 0,5}{10 - 0} = 0,05$$

Ainsi, $f'(0) = 0,05$. Donc :

$$f'(0) = \frac{be^{-b \times 0}}{(1 + e^{-b \times 0})^2} = \frac{b}{(1 + 1)^2} = \frac{b}{4} = 0,05$$

donc $b = 0,05 \times 4 = 0,2$.

Partie B

1. (2 pts) On calcule $p(10) = \frac{1}{1 + e^{-2}} \approx 0,88$.

2. a. (3 pts) On reprend le calcul de la partie A :

$$p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2}$$

p' est donc positive sur tout son ensemble de définition, ainsi p est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- b. (2 pts) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-0,2x} = 1$ et par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 1$.

- c. (2 pts) Cela signifie qu'avec le temps, presque tous les individus finiront par s'équiper. (*Plusieurs réponses seront acceptées*).

3. (3 pts)

On cherche, avec un tableau de valeurs dans la calculatrice, le plus petit nombre entier n tel que $p(n) > 0,95$.

On trouve que $p(14) < 0,95$ et $p(15) > 0,95$, donc le marché sera saturé pendant l'année $2000 + 14 = 2014$.