

Lycée Colbert

Baccalauréat général blanc

Session 2022

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages.

Le sujet est composé de **quatre exercices indépendants**.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

L'usage de la **calculatrice avec mode examen** actif est autorisé.

L'usage de la **calculatrice sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut **admettre un résultat précédemment donné** dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à **faire figurer sur la copie toute trace de recherche**, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Si le candidat pense repérer une **erreur dans le sujet**, il le signale sur sa copie, en précisant les hypothèses qu'il a alors été amené à faire.

Il en sera tenu compte dans la correction.

Exercice 1**5 points**

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet, car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine.
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. A l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,520$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 1\,520$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

La notation $\leftarrow$ correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

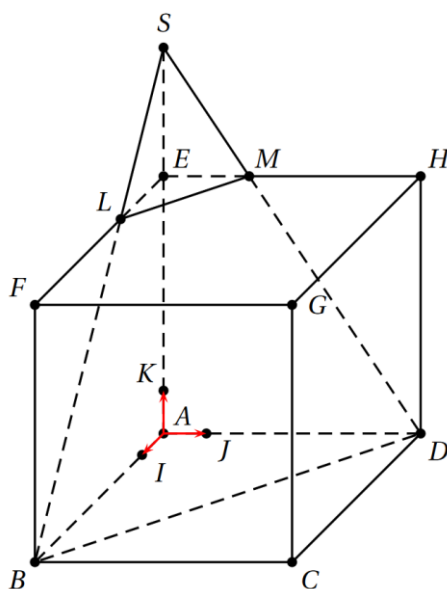
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(0; 1; -1)$ et $B(-2; 2; -1)$ ainsi que la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
2. a. Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.
b. Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas sécantes.
Que peut-on en déduire sur leur position relative ?

Partie B

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-après.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AK})$ tel que $I \in [AB], J \in [AD], K \in [AE]$, et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant un mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante : L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$,

M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) , S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK) .

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) .
b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.

Exercice 3**5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
2. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ .
 - a.** Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
 - b.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
 - c.** Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ .

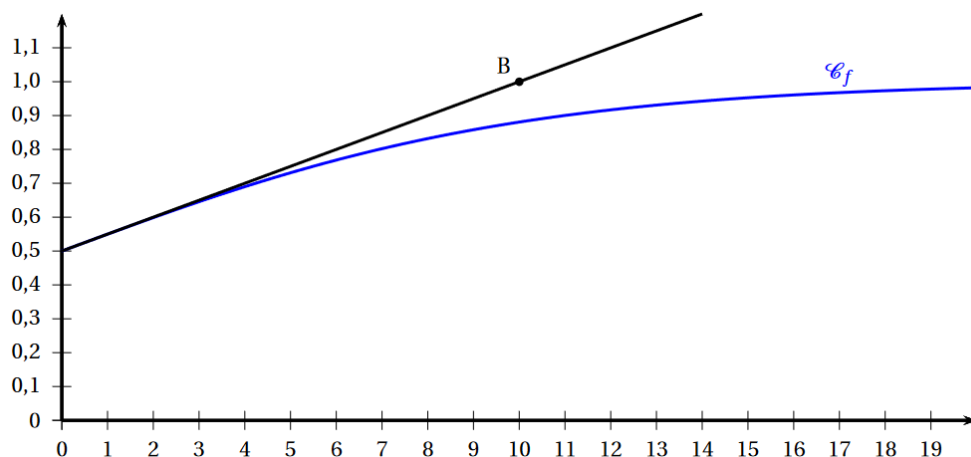
Partie A

Soient a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe C_f passe par le point $A(0; 0,5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10; 1)$.



1. Justifier que $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b .

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

- Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
- Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0; +\infty[$.
 - Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
 - Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
- On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.