Correction des exercices sur les représentations paramétriques de droites

Exercice 1 **1.** (d): $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - t} \\ \boldsymbol{y = 2 + t} \\ \boldsymbol{z = -1 + 2t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. On remplace x, y et z par les coordonnées de B : $\begin{cases} 0 = 1 - t \\ -1 = 2 + t \\ 1 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ 2t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

On trouve la même valeur de t dans les trois équations, donc $\boldsymbol{B \in (d)}$.

3. On remplace x, y et z par les coordonnées de C : $\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \\ 3 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$

On ne trouve pas la même valeur de t dans les trois équations, donc $\boldsymbol{C \notin (d)}$.

Exercice 2 (d_1) passe par $A(\mathbf{6}; \mathbf{-1}; \mathbf{-3})$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

(d_2) passe par $A(\mathbf{-2}; \mathbf{0}; \mathbf{-4})$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(d_3) passe par $A(\mathbf{3}; \mathbf{1}; \mathbf{0})$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

(d_4) passe par $A(\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2})$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Exercice 3

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On peut déterminer la représentation paramétrique à partir de A ou de B, ici à partir de A : (AB): $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - t} \\ \boldsymbol{y = 0 - t} \\ \boldsymbol{z = -2 + 3t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. À partir de A : (AB): $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2t} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = 2 - 3t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Exercice 4

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. À partir de A : (AB): $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 3t} \\ \boldsymbol{y = 2 - 2t} \\ \boldsymbol{z = -3 + 4t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2a. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, et on constate que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et $\boldsymbol{C \in (AB)}$.

2b. $\begin{cases} 5 = -1 + 3t \\ -2 = 2 - 2t \\ 5 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 6 \\ 2t = 4 \\ 4t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{C \in (AB)}$.

Notez qu'on a retrouvé 2, c'est le rapport de colinéarité trouvé à la question précédente.

3. À partir du point $C(5; -2; 5)$ et en utilisant le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ *(on aurait pu utiliser $\overrightarrow{AB}$ à nouveau)* :

(AB): $\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + 6t} \\ \boldsymbol{y = -2 - 4t} \\ \boldsymbol{z = 5 + 8t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

charly-piva.fr

Correction des exercices sur les positions relatives de droites

Exercice 1 d est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\-6\end{pmatrix}$ et d' est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Or $\vec{u}=-2\vec{v}$: ces vecteurs sont colinéaires, donc $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{d'}$ **sont parallèles**.

Vérifions si elles sont confondues, même si ***ce n'est en général pas demandé****.*

On considère $A(1;3;-5)$ point appartenant à d. Or $\begin{cases}1=-5+t\\3=15-2t\\-5=13+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=6\\t=6\\t=-6\end{cases}$

On ne trouve pas la même valeur de t, donc $A\notin d'$. Les droites d et d' ne sont pas confondues : elles sont **strictement parallèles**.

Exercice 2

1. On a $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$ donc $(FG):\begin{cases}\boldsymbol{x=1+3t}\\\boldsymbol{y=-1+6t}\\\boldsymbol{z=2-5t}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

2. La droite d est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Or $\frac{3}{1}=3$; $\frac{6}{2}=3$ mais $\frac{-5}{-1}=5$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc **les droites** $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{(FG)}$ **ne sont pas parallèles**.

3. Soit H l'éventuel point d'intersection. Il existe alors t et k réels tels que :

$$\begin{cases}1+3t=-4+k\\-1+6t=-11+2k\\2-5t=-1-k\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=5+3t\\-1+6t=-11+2(5+3t)\\2-5t=-1-(5+3t)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=5+3t\\-1+6t=-1+6t\\2-5t=-6-3t\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=5+3t\\0=0\\-2t=-8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=5+3t\\0=0\\t=4\end{cases}$$

La deuxième ligne n'est pas une contradiction, mais ***on peut tout y supprimer*** *: elle ne donne pas d'informations sur t ou k, mais n'est pas fausse.*

En revanche, une ligne avec une égalité fausse, même sans variable, telle que $0=1$ serait une contradiction.

On ne trouve pas de contradiction, ainsi, $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{(FG)}$ **sont sécantes** et H est le point de (FG) de paramètre $t=4$ *(et aussi le point de d de paramètre $k=17$).*

On détermine les coordonnées de H : $\begin{cases}x=1+3\times4\\y=-1+6\times4\\z=2-5\times4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=13\\y=23\\z=-18\end{cases}$ ainsi $\boldsymbol{H(13;23;-18)}$.

charly-piva.fr

Exercice 3

1. $d:\begin{cases}\boldsymbol{x=1+t}\\\boldsymbol{y=2-2t}\\\boldsymbol{z=3-t}\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. $d':\begin{cases}\boldsymbol{x=2k}\\\boldsymbol{y=1+2k}\\\boldsymbol{z=2+3k}\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

3. $\begin{cases}6=1+t\\-8=2-2t\\-2=3-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=5\\2t=10\\t=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=5\\t=5\\t=5\end{cases}$ donc $\boldsymbol{M\in d}$.

$\begin{cases}6=2k\\-8=1+2k\\-2=2+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\2k=-9\\3k=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\k=-4{,}5\\k=\dfrac{-4}{3}\end{cases}$ donc $\boldsymbol{M\notin d'}$.

4. $\dfrac{2}{1}=2$ mais $\dfrac{2}{-2}=-1$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et d et d' ne sont pas parallèles.

Soit N un éventuel point d'intersection, il existe alors t et k réels tels que :

$\begin{cases}1+t=2k\\2-2t=1+2k\\3-t=2+3k\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=2k-1\\2-2(2k-1)=1+2k\\3-(2k-1)=2+3k\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=2k-1\\2-4k+2=1+2k\\3-2k+1=2+3k\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=2k-1\\-6k=-3\\-5k=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=2k-1\\k=0{,}5\\k=0{,}4\end{cases}$

On aboutit à une contradiction, donc d et d' ne sont pas sécantes. Elles sont **non-coplanaires**.

Exercice 4

On a $D(0;1;0)$ et $G(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $(\boldsymbol{DG}):\begin{cases}\boldsymbol{x=t}\\\boldsymbol{y=1}\\\boldsymbol{z=t}\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

On a $A(0;0;0)$ et $I(1;0{,}5;1)$ donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$ et $(\boldsymbol{AI}):\begin{cases}\boldsymbol{x=k}\\\boldsymbol{y=0{,}5k}\\\boldsymbol{z=k}\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires (l'ordonnée de $\overrightarrow{DG}$ est nulle alors que celle de $\overrightarrow{AI}$ ne l'est pas) donc les droites (DG) et (AI) ne sont pas parallèles.

Soit M un éventuel point d'intersection, il existe alors t et k réels tels que :

$\begin{cases}t=k\\1=0{,}5k\\t=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=k\\k=2\\t=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\k=2\\t=2\end{cases}$

On ne trouve pas de contradiction, donc les droites (DG) et (AI) sont **sécantes** au point de (DG) de paramètre $t=2$, c'est-à-dire $\boldsymbol{M(2;1;2)}$.

charly-piva.fr