Correction des exercices sur les vecteurs et bases de l'espace

Exercice 1

1. Aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AE}$ ne peut être exprimé en fonction des deux autres, ils sont donc **linéairement indépendants** et forment une base de l'espace.

2. **a.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

b. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}$

c. $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}$

d. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

Exercice 2

$2\vec{u} + \vec{w} = 2(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + 2\vec{\jmath} + \vec{k} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} = \boldsymbol{2\vec{\imath} + \vec{k}}$

Or on remarque que $\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants : ils ne forment **pas une base de l'espace**.

Exercice 3

Supposons qu'on peut exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$.

On peut alors résoudre un système d'équations :

$$\begin{cases}1 = -\alpha + 2\beta\\2 = -\alpha + 3\beta\\-1 = 3\alpha - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 + 2\beta\\2 = -(-1 + 2\beta) + 3\beta\\-1 = 3(-1 + 2\beta) - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 + 2\beta\\2 = 1 - 2\beta + 3\beta\\-1 = -3 + 6\beta - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 + 2\beta\\\beta = 1\\\beta = 0{,}5\end{cases}$$

On aboutit à une contradiction, donc $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants et **forment une base de l'espace**.

Exercice 4

$2\overrightarrow{MN}$

$= 2\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FN}\right)$

$= 2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{FN}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF}$

$= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF}$

$= \boldsymbol{\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF}}$

On en déduit que ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants et ne forment **pas une base de l'espace.**

charly-piva.fr

Correction des exercices sur les coordonnées de points

Exercice 1

• Le repère étant $(A; \overrightarrow{AB}\ ; \overrightarrow{AC}\ ; \overrightarrow{AD})$, on a $\boldsymbol{C(0;1;0)}$.

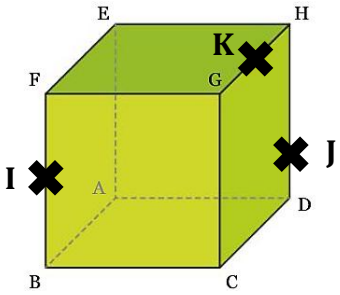
• $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$ donc $\boldsymbol{M(0;0;2)}$.

• $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $\boldsymbol{N(1;1;0)}$.

• $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$ donc $\boldsymbol{P(1;1;2)}$.

Exercice 2

On place les points approximativement sur le schéma comme ci-contre.



Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:

• $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)}$.

• $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{J\left(0;1;\frac{1}{4}\right)}$.

• $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{K\left(\frac{1}{2};1;1\right)}$.

Exercice 3

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$:

• A étant l'origine, on a $\boldsymbol{A(0;0;0)}$.

• D'après le repère, $\boldsymbol{B(1;0;0)}$, $\boldsymbol{C(0;1;0)}$ et $\boldsymbol{D(0;0;1)}$.

• $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\boldsymbol{I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$.

• $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\boldsymbol{J\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)}$.

Correction des exercices sur les opérations sur les points & vecteurs de l'espace

Exercice 1 **1.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{\imath} + 15\vec{\jmath}$ donc $\boldsymbol{C(8;15;0)}$.

2. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 15-8 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} x_C - x_I \\ y_C - y_I \\ z_C - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 15-8 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{-3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 • $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-(-3) \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-(-3) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-2} \end{pmatrix}$.

• Ainsi, $-3\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{EF} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-7} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{5} \end{pmatrix}$

• On a besoin de calculer $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et ensuite $2\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} = 2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-5} \\ \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$

Exercice 3 Démontrons que (par exemple) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -4-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et **les points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont alignés**.

charly-piva.fr

Exercice 4 Ici, il faut démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\3-3\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\1-3\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Or $\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$ mais $\frac{0}{-2}=0\neq\frac{1}{3}$. Les rapports ne sont pas tous égaux, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés, **ils définissent un plan**.

Exercice 5 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\1-0\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-1)\\1-0\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

Or $\frac{3}{2}=1{,}5$ mais $\frac{1}{1}=1\neq 1{,}5$**.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés, **ils définissent un plan**.

2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1-4\\0-(-2)\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$. Essayons de déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{DE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

C'est-à-dire $\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$. On peut résoudre le système d'équations : $\begin{cases}-3=3\alpha+2\beta\\2=\alpha+\beta\\0=-2\alpha-4\beta\end{cases}$

La dernière ligne donne $0=-2\alpha-4\beta\Leftrightarrow 2\alpha=-4\beta\Leftrightarrow\alpha=-2\beta$. On substitue dans les autres lignes.

$$\begin{cases}-3=3\times(-2\beta)+2\beta\\2=-2\beta+\beta\\\alpha=-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=-4\beta\\2=-\beta\\\alpha=-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\frac{3}{4}\\\beta=2\\\alpha=-2\beta\end{cases}$$

On aboutit à une contradiction. Donc $\overrightarrow{DE}$ **n'est pas combinaison linéaire des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$**.**

3. Ainsi, la droite (DE) n'est pas une droite du plan (ABC) : elle est **sécante à ce plan**.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-2\\3-1\\7-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-4\\3-2\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. On constate que $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-2\\2-1\\4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0-3\\3-3\\7-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

Essayons de déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{CD}$

C'est-à-dire $\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$. On peut résoudre le système d'équations : $\begin{cases}-2=2\alpha-3\beta\\2=\alpha\\2=-\alpha+2\beta\end{cases}$

Comme on a $\alpha=2$, on peut remplacer : $\begin{cases}-2=2\times 2-3\beta\\\alpha=2\\2=-2+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6=-3\beta\\\alpha=2\\4=2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\\\alpha=2\\\beta=2\end{cases}$

On ne trouve pas de contradiction pour β, ainsi $\beta=2$.

Donc $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, précisément, $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}=\boldsymbol{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\boldsymbol{2}\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$.

charly-piva.fr