Correction du devoir surveillé sur le chapitre 3

Exercice 1 (7 pts) **1.** *(0,5 pt)* Par soustraction, on détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

(0,5 pt) Ainsi, (AB) admet pour représentation paramétrique $(AB) : \begin{cases}x = 1+t\\y = 2-2t\\z = 5-3t\end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$

2a. *(1 pt)* On utilise les coordonnées de M : $\begin{cases}-5 = 1+2t\\-5 = -2+t\\1 = 4-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -3\\t = -3\\t = 3\end{cases}$ ce qui est contradictoire.

Donc M n'appartient pas à (d_1).

(1 pt) On utilise les coordonnées de M : $\begin{cases}-3 = 1+2t\\-4 = -2+t\\6 = 4-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -2\\t = -2\\t = -2\end{cases}$ ce qui convient.

Donc N appartient à (d_1).

2b. *(1 pt)* (d_1) est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{u}$ avec $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d_1).

2c. *(1 pt)* (d_2) est dirigée par le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire à $\vec{v}$.

Donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

2d. *(1,5 pts)* Soit P un éventuel point d'intersection, il existe alors t et t' réels tels que :

$$\begin{cases}1+2t = t'+8\\-2+t = 1\\4-t = 3t'+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+2\times 3 = t'+8\\t = 3\\4-3 = 3t'+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7 = t'+8\\t = 3\\1 = 3t'+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t' = -1\\t = 3\\t' = -1\end{cases}$$

Le système a une solution, les droites (d_1) et (d_2) sont donc sécantes.

(0,5 pt) Leur intersection est le point de (d_2) de paramètre -1 (ou bien le point de (d_1) de paramètre 3), soit $P(7; 1; 1)$.

Exercice 2 (3 pts) **a.** *(0,5 pt)* I et J sont les milieux de $[SA]$ et $[SB]$, donc $(IJ)//(AB)$ par le théorème de la droite des milieux. *(1 pt)* (IJ) est parallèle à une droite du plan (ABC), donc (IJ) est parallèle à ce plan.

b. *(0,5 pt)* A appartient à la droite (SI), donc au plan (SIK).

(0,5 pt) Il en est de même pour C, qui appartient à la droite (SK).

(0,5 pt) Donc A et C appartiennent aux deux plans, et la droite d'intersection de (SJK) et (ABC) est (AC).

Exercice 3 (8 pts) **1.** *(1 pt)* I a pour coordonnées $(0; 0; \frac{1}{2})$, J a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$.

2. *(0,5 pt)* On commence par donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$: $(\frac{1}{2}; 1; 0)$

(1 pt) Ensuite, $IJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

3. *(1 pt)* Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; 0)$, donc une représentation de (IJ) est, en partant de I : $\begin{cases}x = \frac{t}{2}\\y = t\\z = \frac{1}{2}\end{cases}$

4. *(0,5 pt)* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc M a pour coordonnées $(0; \frac{1}{3}; 1)$

(0,5 pt) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc N a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$

(0,5 pt) K est le milieu de $[MN]$, il faut donc calculer la moyenne des coordonnées de M et de N, donc $K(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2})$

5. *(1,5 pts)* Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; 0)$ et $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; 0)$,

donc $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$, ainsi $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, et les points I, J et K sont alignés.

6. *(0,5 pt)* K est le milieu de la diagonale $[MN]$ mais ce n'est pas le milieu de l'autre diagonale $[IJ]$:

(0,5 pt) il aurait fallu pour cela que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IK}$ à la question précédente.

(0,5 pt) Donc les diagonales du quadrilatère $INJM$ ne se coupent pas en leur milieu : ce n'est pas un parallélogramme.

Exercice 4 (2 pts) *(1 pt)* (d_1) est dirigée par $\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$ et (d_2) est dirigée par $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires, donc $(d_1)//(d_2)$.

(1 pt) Il suffit de montrer qu'un point de (d_1), par exemple $M(0; 2; -3)$, appartient bien à (d_2), ce qui est le cas avec $t' = 2$.