Correction des exercices sur les variables aléatoires, l'espérance et la variance

Exercice 1 **1.** Pour acheter des lunettes, il faut acheter 1 monture et 2 verres, d'où $E = X + 2Y$.

2. $E(Z)$ est le montant moyen des factures.

On calcule $E(X) = 100 \times 0{,}26 + 200 \times 0{,}56 + 300 \times 0{,}18 = 192$

et $E(Y) = 20 \times 0{,}07 + 60 \times 0{,}48 + 110 \times 0{,}22 + 220 \times 0{,}2 + 375 \times 0{,}03 = 109{,}45$.

Ainsi, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y) = 410{,}9$.

3. $V(X) = 4\,336$ et $V(Y) = 6293{,}928$. Les variables X et Y étant indépendantes,

$V(Z) = V(X + 2Y) = V(X) + V(2Y) = V(X) + 2^2 \times V(Y) = V(X) + 4V(Y) = 29510{,}512$.

Ainsi, $\sigma(Z) \approx 172$.

Exercice 2

1. On dresse les tableaux en se rappelant que la somme des probabilités doit être 1.

x_i	12	7	5
$p(X_1 = x_i)$	0,48	0,3	0,22

x_i	4	5	7	0
$p(X_2 = x_i)$	0,12	0,23	0,15	0,5

On trouve $E(X_1) = 8{,}96$, $V(X_1) = 9{,}0384$ $\qquad$ $E(X_2) = 2{,}68$ et $V(X_2) = 7{,}8376$

2a. Tout simplement, $X = X_1 + X_2$.

Ainsi, $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 11{,}64$ par linéarité de l'espérance,

et $V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 16{,}876$ car X_1 et X_2 sont indépendantes.

2b. Cette fois, $X = X_1 + 1{,}2X_2$.

Toujours par linéarité de l'indépendance, $E(X) = E(X_1 + 1{,}2X_2) = E(X_1) + 1{,}2E(X_2) = 12{,}176$

et, X_1 et X_2 étant toujours indépendantes,

$$V(X) = V(X_1 + 1{,}2X_2) = V(X_1) + V(1{,}2X_2) = V(X_1) + 1{,}2^2 \times V(X_2) \approx 20{,}325$$

Exercice 3

1. Un tirage, ici avec remise, correspond à un triplet : il y en a donc $8^3 = 512$.

2a. Sans répétition, c'est un arrangement : il y en a $8 \times 7 \times 6 = 336$.

2b. Par soustraction, il y a $512 - 336 = 176$ tirages comportant au moins une répétition de numéro.

3. X_1 peut valoir 1,2,3 … ,8 avec équiprobabilité. On dresse le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4.

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + \cdots + 8 \times \frac{1}{8} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$$

5. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3)$

$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$ par linéarité de l'indépendance

$= 3 \times E(X_1)$ car les trois variables aléatoires suivent la même loi

$= 13{,}5$

6. $S = 24$ correspond à un unique tirage : (8,8,8). Ainsi :

$$p(S = 24) = \frac{1}{512}$$

7. Les tirages qui permettent de gagner un lot ne peuvent comporter que des 6 ou plus. Ce sont :

(8,8,8); (7,8,8); (8,7,8); (8,8,7); (6,8,8); (8,6,8); (8,8,6); (7,7,8); (7,8,7); (8,7,7)

On en compte bien 10.

8. Ainsi, la probabilité de gagner un lot est :

$$p(S \geq 22) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$