Exercices : variables aléatoires, espérance, variance

Exercice 1 Lors du bilan de fin d'année, un opticien a établi les résultats suivants quant aux ventes de montures et de verres correctifs réalisées. On choisit au hasard une facture parmi celles correspondant aux clients ayant acheté une paire de lunettes.
On note Z la variable aléatoire correspondant au prix de la paire.
On suppose que les deux verres ont le même prix.

Prix monture (en €)	100	200	300
Fréquence (en %)	26	56	18

Prix verre (en €)	20	60	110	220	375
Fréquence (en %)	7	48	22	20	3

1. On note Z la variable aléatoire correspondant au prix de la monture et Y la variable aléatoire correspondant au prix d'un verre. Justifier l'égalité $Z = X + 2Y$.
2. Déterminer $E(Z)$. Interpréter le résultat obtenu.
3. On suppose les variables X et Y indépendantes. Déterminer $V(X)$ puis $V(Y)$ à la calculatrice et en déduire $V(Z)$. Calculer ensuite une valeur approchée à l'unité de $\sigma(Z)$.

Exercice 2
Un cinéma propose différents tarifs : un tarif plein à 12€, un tarif étudiant à 7€ et un tarif enfant à 5€.
Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients bénéficient du tarif enfant et les autres du tarif étudiant.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons à 4€, 23% achètent seulement un paquet de pop-corn taille moyenne à 5€, et 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn en grande taille à 7€. Les autres clients ne prennent pas de confiserie.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant respectivement au prix de sa place et au prix payé pour l'éventuelle confiserie. On admet que le choix de confiserie est indépendant du tarif de la place.
1. Déterminer les lois de probabilités de X_1 et X_2, puis calculer leur espérance et variance à la calculatrice.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.
a. Exprimer X en fonction de X_1 et X_2, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
b. Le cinéma décide d'augmenter le tarif des confiseries de 20%. Recalculer alors $E(X)$ et $V(X)$ en justifiant et en arrondissant au millième si nécessaire.

Exercice 3
Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4; 5; 1)$.
1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. **a.** Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.
On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.
5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $p(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
b. En déduire la probabilité de gagner un lot.