Correction des exercices sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1

Il s'agit d'appliquer Bienaymé-Tchebychev dans le sens « contraire » avec un écart $\delta = 100$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - 4\,000| < 100) \geq 1 - \frac{1300}{100^2}$$
$$\Leftrightarrow p(|X - 4\,000| < 100) \geq 1 - 0{,}13$$
$$\Leftrightarrow p(|X - 4\,000| < 100) \geq 0{,}87$$

Exercice 2

Ici, on applique Bienaymé-Tchebychev dans le sens « classique » avec $\delta = 25$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - 250| \geq 25) \leq \frac{50}{25^2} \Leftrightarrow p(|X - 250| \geq 25) \leq 0{,}08$$

Ainsi, la probabilité qu'un pain ne soit pas vendu est inférieure à 8%.

Exercice 3

1. La variable M_{20} correspond à l'âge moyen, sur cet échantillon de 20 enfants, d'apparition des premiers symptômes allergiques.

2. D'après la linéarité de l'espérance, les variables $A_1; A_2; \dots; A_{20}$ suivant toutes la même loi :

$$E(M_{20}) = E\left(\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20}E(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}) = \frac{1}{20} \times 20E(A_1) = E(A_1) = 4$$

De plus, les variables $A_1; A_2; \dots; A_{20}$ étant indépendantes :

$$V(M_{20}) = V\left(\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20^2}V(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}) = \frac{1}{20^2} \times 20V(A_1) = \frac{V(A_1)}{20} = \frac{2{,}25}{20} = 0{,}1125$$

3. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2$.

$$p(|M_{20} - 4| < 2) \geq 1 - \frac{0{,}1125}{2^2} \Leftrightarrow p(2 < M_{20} < 6) \geq 0{,}971875$$

Ainsi, la probabilité que l'âge moyen d'apparition des symptômes sur les 20 enfants soit comprise entre 2 et 6 est très élevée, supérieure à 97%.

Exercice 4

a. X_n suit la loi $\mathcal{B}(n\,; 0{,}09)$, donc $E(X_n) = 0{,}09n$ et $V(X_n) = n \times 0{,}09 \times 0{,}91 = 0{,}0819n$.

Par linéarité de l'espérance, $E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0{,}09n = 0{,}09$

et $V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2} \times 0{,}0819n = \frac{0{,}0819}{n}$

b. On applique l'inéglité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0{,}05$:

$$p(|F_n - 0{,}09| < 0{,}05) \geq 1 - \frac{\frac{0{,}0819}{n}}{0{,}05^2}$$
$$\Leftrightarrow p(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{0{,}0819}{0{,}05^2 \times n}$$
$$\Leftrightarrow p(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$$

c. Ici, on a $n = 500$. D'après la question **b**, la probabilité que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre 4% et 14% est supérieure à $1 - \frac{32{,}76}{500} = 0{,}93448 \approx 93\%$.

Le responsable obtient 55 tomates non commerciablisables, soit 11%, ce qui est en effet assez probable.