Correction des exercices type bac sur les variables aléatoires

Exercice 1

I2. Il s'agit de calculer $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

I3. On utilise la formule des probabilités totales pour calculer : $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0{,}48 + 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}49$.

I4. X_1vaut 1 si l'événement A est réalisé, et 0 sinon.
Ainsi, $E(X_1) = 1 \times p(X_1 = 1) + 0 \times p(X_1 = 0) = 1 \times p(A) = 0{,}8$.
De même, $E(X_2) = 1 \times p(X_2 = 1) + 0 \times p(X_2 = 0) = 1 \times p(B) = 0{,}49$.
Notez aussi que X_1 et X_2 sont des variables suivant une loi de Bernoulli : leur espérance est égale à la probabilité de succès, on n'avait pas besoin de s'embêter avec la formule complète.
Enfin, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 0{,}8 + 0{,}49 = 1{,}29$.
Cela signifie que la moyenne de la note des candidats sur le premier exercice est de 1,29.

I5a. L'événement $X = 0$ correspond au cas où le candidat donne deux réponses fausses, c'est-à-dire $\bar{A} \cap \bar{B}$.

$$P(X = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$$

L'événement $X = 2$ correspond à $A \cap B$, donc :

$$P(X = 2) = P(A \cap B) = 0{,}48$$

X ne pouvant prendre que les valeurs 0, 1 ou 2, on a :

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - 0{,}18 - 0{,}48 = 0{,}34$$

I5b. Ouille. Il faut connaître la formule de la variance, sachant que $E(X) = 1{,}29$.

$$\begin{aligned} V(X) &= P(X = 0)\big(0 - E(X)\big)^2 + P(X = 1)\big(1 - E(X)\big)^2 + P(X = 2)\big(2 - E(X)\big)^2 \\ &= 0{,}18 \times (-1{,}29)^2 + 0{,}334 \times (-0{,}29)^2 + 0{,}48 \times 0{,}71^2 \\ &= 0{,}299538 + 0{,}028594 + 0{,}241968 \\ &= 0{,}57 \end{aligned}$$

I5c. Plutôt que de recracher à nouveau la formule de la variance, on utilise le fait que X_1 et X_2 sont des variables suivant la loi de Bernoulli. $V(X_1) = 0{,}8(1 - 0{,}8) = 0{,}16$ et $V(X_2) = 0{,}49(1 - 0{,}49) = 0{,}2499$.
On a $V(X_1) + V(X_2) = 0{,}4099 \neq V(X)$. Ce n'est pas surprenant, car les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

II1. Y correspond au nombre de succès dans le schéma de Bernoulli dont l'épreuve est « répondre à une question », répétée 8 fois de façon identique et indépendante. Ainsi, $Y \sim \mathcal{B}(8; 0{,}75)$.

II2. Cet événement correspond à un unique parcours du schéma de Bernoulli, celui où l'on n'obtient que des succès. $P(Y = 8) = 0{,}75^8$.

II3. D'après le cours, $E(Y) = 8 \times 0{,}75 = 6$ et $V(Y) = 8 \times 0{,}75 \times 0{,}25 = 1{,}5$.

III1. $E(Z) = E(X) + E(Y) = 1{,}29 + 6 = 7{,}29$
et comme X et Y sont indépendantes, $V(Z) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = 2{,}07$.

III2a.

$$E(M_n) = \frac{E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n)}{n} = \frac{E(Z) + E(Z) + \cdots + E(Z)}{n} = \frac{nE(Z)}{n} = E(Z) = 7{,}29$$

III2b.

$$\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{nV(Z)}{n^2}} = \sqrt{\frac{V(Z)}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}07}{n}}$$

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$\sqrt{\frac{2{,}07}{n}} \leq 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{2{,}07}{n} \leq 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{n}{2{,}07} \geq \frac{1}{0{,}25} \Leftrightarrow n \geq 4 \times 2{,}07 \Leftrightarrow n \geq 8{,}28$$

c'est-à-dire, comme n est entier, $n \geq 9$.

Suite de la correction de l'exercice 1

III2c. Si on arrondit l'espérance à 7,3, l'événement $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$ est le contraire de $|M_n - 7{,}3| \geq 1$

Nous avons donc besoin de l'inégalité de concentration, qui nous dit la chose suivante :

$$P(|M_n - E(Z)| \geq 1) \leq \frac{V(Z)}{n \times 1^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - 7{,}3| \geq 1) \leq \frac{2{,}07}{n}$$

En prenant $n = 9$, on a $\frac{2{,}07}{n} \approx 0{,}23$. Ainsi, pour $n \geq 9$:

$$P(|M_n - 7{,}3| \geq 1) \leq 0{,}23$$

et ainsi, pour $n \geq 9$, on a $P(6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3) \geq 1 - 0{,}23 \geq 0{,}77$, ce qui prouve le résultat voulu.

Exercice 2

A2. $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}12$.

A3. $p(C \cap \bar{S}) = p(C) \times p_C(\bar{S}) = 0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$. La probabilité qu'une connexion passe par le serveur C et soit instable est 0,09.

A4. $p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}9 + 0{,}15 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}85 = 0{,}225 + 0{,}12 + 0{,}51 = 0{,}855$

A5. La question demande de calculer $p_s(B)$.

$$p_s(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}12}{0{,}855} \approx 0{,}140$$

B1a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}145$.

Bizarrement, ici le « succès » correspond à une connexion instable.

B1b. $p(X \leq 8) \approx 0{,}704$

B2a. *Ici, X suit une loi binomiale de paramètres n inconnu, et $p = 0{,}145$.*

L'événement $(X \geq 1)$ dont on recherche la probabilité, est le contraire de l'événement $(X = 0)$, la probabilité qu'aucune connexion ne soit instable, qui correspond à un parcours de schéma de Bernoulli qui passe par n « échecs ».

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}855^n$$

B2b. $p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}855^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow -0{,}855^n \geq -0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}855^n \leq 0{,}01$

On applique la fonction ln. Attention, ne pas oublier que $ln(0{,}885)$ est négatif.

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}855^n) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln(0{,}855) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}855)}$$

et la plus petite valeur de n correspondante est 30.

B3a. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145, donc $E(X_n) = n \times 0{,}145$.

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{n \times 0{,}145}{n} = 0{,}145$$

B3b. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0{,}1$:

$$p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}1) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}1^2} \Leftrightarrow p(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}123975}{n \times 0{,}01} \Leftrightarrow p(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}3975}{n}$$

Or $\frac{12{,}3975}{n} \leq \frac{12{,}5}{n}$ donc cela prouve l'inégalité voulue.

c. Ici, la fréquence calculée, $F_{1\,000} = 0{,}3$, s'écarte de plus de 0,1 de la moyenne 0,145.

Or d'après la question **b**, la probabilité que cela se produise est inférieure à $\frac{12{,}5}{1\,000} = 0{,}0125$

Le responsable a donc raison de soupçonner un dysfonctionnement les serveurs. Il devrait essayer de résoudre ce problème de toute urgence. Le succès de toute l'entreprise en dépend.