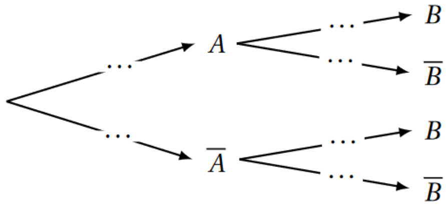
Exercices type bac faisant intervenir les variables aléatoires

Exercice 1 Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2. Chaque question est notée sur un point.
• Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
• Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.
On prend un candidat au hasard et on note :
• A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
• B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».



1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note : • X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
• X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
• X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X.
Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes. Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point. Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions. On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.
1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif. Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen. On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.
On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

a. Quelle est l'espérance de M_n ?
b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart-type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
c. Pour les valeurs trouvées en **b**, montrer que la probabilité que $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 2 Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

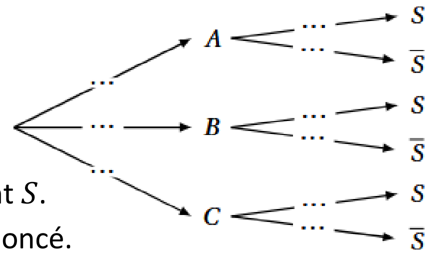
Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.). On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ». On note $\bar{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation de l'énoncé.

2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

3. Calculer la probabilité $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0{,}855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B. On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B D'après la partie A, la probabilité qu'une connexion soit instable est égale à $0{,}145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. On donnera la valeur arrondie au millième.

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $0{,}145$.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion soit instable.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question **2**.

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$. On admet que $V(F_n) = \dfrac{0{,}123975}{n}$.

b. Vérifier que : $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{12{,}5}{n}$

c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1\,000} = 0{,}3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?