

Correction

Exercice 1 Soit $P(n)$ la propriété à démontrer. Soit $a > 0$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Démontrons $P(n + 1)$: $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

$$\begin{aligned} \text{On calcule : } (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na) \times (1 + a) && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &\geq 1 + a + na + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a + na^2 && (\text{or } na^2 \text{ est positif}) \\ &\geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Soit $P(n)$ la propriété à démontrer.

Initialisation : pour $n = 0$, $3 \times 2^0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie : $u_n = 3 \times 2^n + 1$.

Démontrons $P(n + 1)$: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$.

$$\begin{aligned} \text{D'après la définition de la suite, } u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) - 1 && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= 3 \times 2^n \times 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $P(n)$: $v_{n+1} \leq v_n$ la propriété à démontrer.

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 8$ et $v_1 = \frac{1}{4} \times 8 + 3 = 2 + 3 = 5 \leq v_0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie : $v_{n+1} \leq v_n$.

Démontrons $P(n + 1)$: $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{On part de l'hypothèse de récurrence : } v_{n+1} &\leq v_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} v_{n+1} &\leq \frac{1}{4} v_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} v_{n+1} + 3 &\leq \frac{1}{4} v_n + 3 \\ \Leftrightarrow v_{n+2} &\leq v_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 a. $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,500 \times 0,9 + 100 = 2\,350$

b. 10% des arbres sont coupés, donc il en reste 90%, d'où la multiplication par 0,9.

On plante ensuite 100 arbres, d'où l'addition avec 100.

c. Soit $P(n)$ la propriété à démontrer.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,350$, on a bien $1\,000 \leq u_1 \leq u_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie : $1\,000 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Démontrons $P(n + 1)$: $1\,000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{On part de l'hypothèse de récurrence : } 1\,000 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ \Leftrightarrow 0,9 \times 1\,000 &\leq 0,9 \times u_{n+1} \leq 0,9 \times u_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 900 + 100 \leq 0,9 \times u_{n+1} + 100 \leq 0,9 \times u_n + 100$$

$$\Leftrightarrow 1\,000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d.

```
u = 2500
```

```
for i in range(30)
```

```
    u = 0.9*u+100
```

```
print(u)
```