

Correction des exercices de révision type Bac sur les suites

Exercice 1

1. $u_1 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,700$ et $u_2 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,415$

2a. Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 10\,000 > 4\,000$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 4\,000$

Alors $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$

$$\Leftrightarrow 0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > 4\,000$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4\,000$

2b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 4 000, donc elle converge.

3a. $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$

3b. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95$$

On a montré que le rapport était constant égal à 0,95,

donc (v_n) est géométrique, de raison 0,95.

3c. D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 6\,000 \times 0,95^n$$

Or $v_n = u_n - 4\,000 \Leftrightarrow u_n = 4\,000 + v_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n$

3d. (v_n) est une suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1 .

Sa limite est donc 0 et celle de (u_n) est 4 000.

4. D'après l'énoncé, le nombre d'individus peut être représenté par les valeurs de la suite (u_n) , dont la limite est 4 000 d'après la question précédente, ce qui est moins de la moitié de 10 000. L'affirmation est vraie.

Exercice 2

Avant d'essayer de démontrer une réponse, vous pouvez faire des essais à la calculatrice pour avoir une idée, ou représenter les suites à la calculatrice pour essayer de voir les limites.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1 .

Par somme ou par différence, (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1.

Donc (w_n) converge vers 1 d'après le théorème des gendarmes. Réponse B.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+2+1} = e^{2n} \times e^2 \times e^1 = e^2 \times e^{2n} \times e^1 = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 u_n$

Ainsi, la suite est géométrique de raison e^2 . Réponse C.

3. (v_n) converge vers 0 et (u_n) diverge vers $+\infty$, donc d'après la règle du quotient de limites, la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers 0. Réponse B.

4. Plus difficile : il s'agit d'une forme indéterminée, pas facile à factoriser.

On va essayer d'utiliser la règle de calcul sur les puissances : $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n} = \frac{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1\right)} = \frac{2^n}{5^n} \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{3}{5^n} + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{3}{5^n} + 1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1 .

Le numérateur $\frac{1}{2^n} + 1$ et le dénominateur $\frac{3}{5^n} + 1$ tendent tous les deux vers 1, donc la fraction tend vers 1.

Par produit, (u_n) converge vers 0.

Exercice 3

A1. La fonction f est un produit, que l'on dérive en posant par exemple $u(x) = 2x$ et $v(x) = 1 - x$.

On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$. Ainsi, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$f'(x) = 2 \times (1 - x) + 2x \times (-1) = 2 - 2x - 2x = -4x + 2$$

Cette fonction affine est positive sur $] - \infty; 2]$ puis négative sur $[2; +\infty[$.

Donc $f'(x)$ est positif pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et f est croissante sur cet intervalle.

A2. Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,3$ et on calcule $u_1 = 2 \times 0,3(1 - 0,3) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.

On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Ici, il est beaucoup, beaucoup plus facile d'appliquer la fonction f qui est croissante, que de recréer les opérations de la formule de récurrence. Quand une suite est définie à l'aide d'une fonction croissante, il faut toujours penser à appliquer la fonction !

On applique la fonction f qui est croissante : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Et ainsi $f(0) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Or $f(0) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Ainsi, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

A3. (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite ℓ .

La fonction f est continue, donc d'après le théorème du point fixe, on a $f(\ell) = \ell$, ce qui implique :

$$2\ell(1 - \ell) = \ell \Leftrightarrow 2\ell - 2\ell^2 = \ell \Leftrightarrow \ell - 2\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(1 - 2\ell) = 0$$

Cette équation produit nul admet les deux solutions 0 et $\frac{1}{2}$ qu'on a trouvées en **A2**. Or (u_n) est croissante et

$u_0 = 0,3$, donc (u_n) ne peut pas converger vers 0. Ainsi, $\ell = \frac{1}{2}$.

B1a. On a donc pour tout n entier naturel, $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n) \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = P_n \Leftrightarrow P_{n+1} = 2P_n$

Ainsi, (P_n) est une suite géométrique de raison 2.

B1b. (P_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison supérieure à 1,

donc sa limite est $+\infty$. On pouvait aussi remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 3 \times 2^n$.

B2a. $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,3$.

Et pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n) \Leftrightarrow P_{n+1} = P_n(1 - 0,2P_n) + P_n = P_n(2 - 0,2P_n)$

donc $v_{n+1} = 0,1 \times P_{n+1} = 0,1P_n(2 - 0,2P_n) = 0,1P_n \times 2(1 - 0,1P_n) = v_n \times 2(1 - v_n) = 2v_n(1 - v_n)$

B2b. (v_n) a le même premier terme et la même formule de récurrence que (u_n) .

Elle converge donc vers la même limite, qui est 0,5.

Or $P_n = 10v_n$ donc (P_n) converge vers 5, et la population se stabilise autour de 5 000 individus.

Exercice 4

1. Les deux fournisseurs ayant le monopole, la somme de leurs parts de marché doit être de 100%, soit 1. Ainsi, $a_n + b_n = 1$.

2. Chaque année, Electic perd 5% de ses clients, d'où le $0,95a_n$. Il gagne 15% des clients de Energo, soit $0,15b_n$.

3. Pour tout n entier naturel, $b_n = 1 - a_n$.

Ainsi, $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15b_n = 0,95a_n + 0,15(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,15 - 0,15a_n = 0,8a_n + 0,15$.

4a.

```
def parts() :  
    a = 0.55  
    for i in range(10) :  
        a = 0.8*a + 0.15  
    return a
```

4b. La calculatrice fournit $a_0 = 0,729$ (attention à l'arrondi !)

5a. Initialisation : pour $n = 0$, on a $a_0 = 0,55$ et $a_1 = 0,59$ donc $a_0 \leq a_1 \leq 0,75$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75$

Alors $0,8a_n \leq 0,8a_{n+1} \leq 0,8 \times 0,75$

$\Leftrightarrow 0,8a_n + 0,15 \leq 0,8a_{n+1} + 0,15 \leq 0,6 + 0,15$

$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 0,75$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75$

5b. Nous venons de montrer que (a_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers une limite ℓ .

La suite (a_n) est définie par $a_{n+1} = f(a_n)$ où $f(x) = 0,8x + 0,15$. f est une fonction continue, donc d'après le théorème du point fixe, on a $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 0,8\ell + 0,15 = \ell \Leftrightarrow 0,15 = 0,2\ell \Leftrightarrow \ell = 0,75$.

5c. Cela signifie que la part de marché d'Electic croîtra et se rapprochera de plus en plus de 75% à long terme.

Exercice 5

1. On calcule :

$$u_1 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4} = 1,25$$

2a.

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2 \quad a_1 = \frac{1,25}{1,25 - 1} = \frac{1,25}{0,25} = 5$$

2b. A priori, ce n'est pas une démonstration par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{2u_n + 1 - u_n - 2} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

Cela semble coïncé. On peut essayer de calculer $3a_n - 1$ en espérant retomber sur le même résultat.

$$3a_n - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

Ainsi, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

2c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n)$ la propriété à démontrer.

Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $a_1 = 5$ et $3 \times 1 - 1 = 2$, donc $a_1 \geq 3 \times 1 - 1$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: $a_n \geq 3n - 1$ est vraie.

Démontrons $P(n + 1)$: $a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1$.

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} a_n &\geq 3n - 1 \\ \Leftrightarrow 3a_n &\geq 3(3n - 1) \\ \Leftrightarrow 3a_n - 1 &\geq 9n - 3 - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &\geq 9n - 4 \end{aligned}$$

Or $3(n+1) - 1 = 3n + 2$.

De plus, $9n - 4 \geq 3n + 2 \Leftrightarrow 6n \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 1$, donc pour n supérieur ou égal à 1 comme supposé, on a bien $9n - 4 \geq 3n + 2$.

Donc $a_{n+1} \geq 9n - 4 \geq 3n + 2 : P(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 3n - 1$.

2d. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

3a. On reprend la formule définissant (a_n) et on effectue un produit en croix, puis on factorise par u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{u_n}{u_n - 1} \\ \Leftrightarrow a_n(u_n - 1) &= u_n \\ \Leftrightarrow a_n u_n - a_n &= u_n \\ \Leftrightarrow a_n u_n - u_n &= a_n \\ \Leftrightarrow u_n(a_n - 1) &= a_n \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{a_n}{a_n - 1} \end{aligned}$$

3b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. L'expression de u_n nous donne une forme indéterminée, mais on simplifie par (a_n) :

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{a_n}{a_n \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$$

Or par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, donc par différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{a_n} = 1$ et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = 1$.

4a. L'algorithme calculer le plus petit indice n tel que $u_n < 1 + p$, ce qui arrivera nécessairement car u_n est décroissante et tend vers 1, ainsi que la valeur de u_n correspondante.

4b. Avec un tableau de valeurs, on trouve $u_5 \approx 1,0027 > 1,001$ et $u_6 \approx 1,0009 < 1,001$. Ainsi, $n = 6$.

Exercice 6

1. On a $u_1 = 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,189$ et $u_2 = 0,9 \times 0,189 \times (1 - 0,189) \approx 0,138$, soit respectivement 189 puis 138. Sale temps pour les tortues.

2a. u_{n+1} est un produit de trois facteurs positifs, donc positif.

De plus, $(1 - u_n)$ est compris entre 0 et 1, donc $u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \leq 0,9u_n$.

On a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.

2b. Initialisation : pour $n = 0$, on a $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$, donc $u_0 \leq 0,3 \times 0,9^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

Or on sait d'après **2a** que $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.

Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9(0,3 \times 0,9^n)$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^n \times 0,9$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

2c. La suite de terme général $0,3 \times 0,9^n$ est géométrique de raison 0,9, comprise entre -1 et 1.

Elle converge donc vers 0. Ainsi, (u_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

Cela veut dire qu'à long terme, les tortues vont disparaître !!!

3.

`u = 0.3`

`n = 2020`

while `u > 0.03 :`

`u = 0.9*u*(1 - u)`

`n = n + 1`

print(`n`)

Exercice 7

1a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 + 1 = 3$

1b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$

mais il est admis que la suite (u_n) est strictement positive.

Donc $v_{n+1} - v_n$ est strictement positif et (v_n) est strictement croissante.

Comme $v_0 = 1$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 1$

1c. Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 1 \geq 0 + 1$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq n + 1$. Alors :

$$u_n + v_n \geq n + 1 + v_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq n + 1 + 1 \quad (\text{d'après la question précédente})$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq n + 2$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$

1d. D'après le théorème de comparaison, la limite de (u_n) est $+\infty$.

2a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$

En divisant par u_n^2 , on trouve $\frac{-1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$

2b. La limite de (u_n) est $+\infty$, donc la limite de (u_n^2) est $+\infty$ par produit.

Ainsi, les limites de $\frac{-1}{u_n^2}$ et $\frac{1}{u_n^2}$ sont 0 par quotient.

D'après le théorème des gendarmes et la question **2a**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$$

2c. La limite de (r_n^2) est donc 2 par somme. (r_n) étant strictement positive, en appliquant la fonction racine carrée, on en déduit que (r_n) tend vers $\sqrt{2}$.

2d. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

2e. 5 est le premier indice n tel que la différence entre r_n et sa limite $\sqrt{2}$ est inférieure à 10^{-4} .

(Le programme calcule les termes de (r_n) grâce à la formule trouvée en **2d** jusqu'à ce que la valeur trouvée soit suffisamment proche de $\sqrt{2}$).

