<u>Correction du devoir surveillé sur les suites</u>

Exercice 1 (5 pts)

1. (2 pts) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}&-1 \leq \cos(n) \leq 1\\ &\Leftrightarrow 3-1 \leq 3+\cos(n) \leq 3+1\\ &\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} \leq \frac{3+\cos(n)}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0.

2. (1,5 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{3n^2}{n+2} = \dfrac{n^2\times 3}{n^2(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} = \dfrac{3}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} = 0$. Par quotient, (v_n) diverge vers $+\infty$. L'affirmation est fausse.

3. (1,5 pts) $w_0 = \dfrac{1}{2}$, $w_1 = \dfrac{3}{2}$, $w_2 = \dfrac{9}{2}$ et $w_3 = \dfrac{19}{2}$.

Ainsi, $\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1} = 3$ mais $\frac{w_3}{w_2} = \dfrac{19}{9} \neq 3$. Le rapport entre un terme et le suivant n'est pas constant, donc la suite n'est pas géométrique.

Exercice 2 (9 pts)

1. (0,5 pt) Chaque année, le nombre de panneaux diminue de 2%, ce qui revient bien à le multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$, puis on lui ajoute 250, ce qui correspond bien à la définition de la suite (u_n).

2. (1 pt) La calculatrice nous dit que u_n semble être strictement supérieur à 12 000 pour $n \geq 68$, donc ce sera à partir de l'année 2088.

3. (1,5 pts) <u>Initialisation</u> : On a bien $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \leq 12\,500$

Alors $0{,}98u_n \leq 0{,}98 \times 12\,500 \Leftrightarrow 0{,}98u_n + 250 \leq 12\,250 + 250 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq 12\,500$

<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 12\,500$

4. (1,5 pts) Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule $u_{n+1} - u_n = 0{,}98u_n + 250 - u_n = 250 - 0{,}02u_n$

Or $u_n \leq 12\,500 \Leftrightarrow -0{,}02u_n \geq -250 \Leftrightarrow 250 - 0{,}02u_n \geq 0$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, et la suite (u_n) est croissante.

5. (1 pt) La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

6a. (1,5 pts) Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 12\,500}{u_n - 12\,500} = \frac{0{,}98u_n + 250 - 12\,500}{u_n - 12\,500} = \frac{0{,}98u_n - 12\,250}{u_n - 12\,500} = \frac{0{,}98(u_n - 12\,500)}{u_n - 12\,500} = 0{,}98$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,98, son premier terme est $v_0 = u_0 - 12\,500 = -1\,940$

6b. (1 pt) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = -1940 \times 0{,}98^n$ et donc $u_n = 12\,500 - 1940 \times 0{,}98^n$

6c. (1 pt) $-1 < 0{,}98 < 1$ donc (v_n) converge vers 0. Ainsi, (u_n) converge vers 12 500.

Exercice 3 (7 pts)

1. (1 pt) $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$

2. (1,5 pts) f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2} = \frac{4}{(1+3x)^2}$$

f' est toujours positive, donc f est croissante.

3. (2 pts) <u>Initialisation</u> : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$ donc on a bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

On applique la fonction f qui est *(fort heureusement)* croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 2\right]$: $f(\frac{1}{2}) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} \geq \frac{1}{2}$ et $f(2) = \frac{4\times 2}{1+3\times 2} = \frac{8}{7} \leq 2$

Ainsi, $\frac{4}{5} \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq \frac{8}{7}$ et donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

4. (1 pt) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

5. (1,5 pts) La fonction f est continue, donc on peut appliquer le théorème du point fixe.

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{4\ell}{1+3\ell} \Leftrightarrow \ell(1+3\ell) = 4\ell \Leftrightarrow \ell + 3\ell^2 = 4\ell \Leftrightarrow 3\ell^2 - 3\ell = 0 \Leftrightarrow 3\ell(\ell - 1) = 0$$

Cette équation produit a deux solutions : 0, mais qui ne peut être la limite de (u_n), et 1.
Donc ℓ vaut 1.