

Correction du devoir surveillé sur les suites

Exercice 1 (4 pts)

(1 pt) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\sqrt{n} = +\infty$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Par différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(1,5 pt) Il s'agit d'une forme indéterminée par quotient. Mais :

$$v_n = \frac{3n+1}{7n-5} = \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(7 - \frac{5}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{7 - \frac{5}{n}}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 - \frac{5}{n} = 7$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{7}$.

(1,5 pt) $(-1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais :

$$\begin{aligned} -1 &\leq (-1)^n \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} &\leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 7 - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leq 7 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq 7 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 7 - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leq w_n \leq 7 + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 - \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 7$ donc d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 7$.

Exercice 2 (5 pts)

1. (0,5 pt) Chaque année, le nombre d'arbres **décroit d'abord de 10%**, ce qui explique la multiplication par 0,9. On ajoute ensuite 60 arbres, d'où la formule $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.

2. (1 pt) $u_1 = 0,9 \times 400 + 60 = 360 + 60 = \mathbf{420}$ et $u_2 = 0,9 \times 420 + 60 = 378 + 60 = \mathbf{438}$.

3. (1,5 pt : 0,5 initialisation, 1 hérédité)

Initialisation : On sait que $u_0 = 400$ et $600 - 200 \times 0,9^0 = 600 - 200 = 400$.

Donc on a bien $u_0 = 600 - 200 \times 0,9^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = 600 - 200 \times 0,9^n$. Alors :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60 = 0,9(600 - 200 \times 0,9^n) + 60 = 540 - 0,9 \times 200 \times 0,9^n + 60 = \mathbf{600 - 200 \times 0,9^{n+1}}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 600 - 200 \times 0,9^n$.

4. (1 pt, il faut bien justifier la suite géométrique) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison 0,9, comprise entre -1 et 1 . Donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -200 \times 0,9^n = 0$ et par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{600}$.

5. (1 pt) L'arboriculteur risque de manquer de place, car **la limite est supérieure à 500** : il finira par avoir trop d'arbres dans son verger.

Exercice 3 (8 pts)

1. (1 pt : 0,5 pour u_1 et 0,5 pour le nombre d'insectes)

$$u_1 = 1,2 \times 0,03 - 1,6 \times 0,03^2 = 0,036 - 0,00144 = 0,03456 \text{ ce qui correspond à } 34\,560 \text{ insectes.}$$

2a. (1 pt) $f(x) = x \Leftrightarrow 1,2x - 1,6x^2 = x \Leftrightarrow 0,2x - 1,6x^2 = 0 \Leftrightarrow 0,2x(1 - 8x) = 0$.

Cette équation produit nul admet deux solutions : $x = \mathbf{0}$ et $x = \frac{1}{8} = \mathbf{0,125}$.

2b. (1,5 pts) Pour tout $x \in [0; 0,2]$, on a $f'(x) = 1,2 - 1,6 \times 2x = 1,2 - 3,2x$.

Cette dérivée s'annule pour $x = \frac{1,2}{3,2} = 0,375$.

Ainsi, elle est positive sur $] -\infty; 0,375]$ donc positive sur $[0; 0,2]$.

Donc f est **croissante** sur son ensemble de définition.

3a. (1,5 pt : 0,5 initialisation, 1 hérédité)

Initialisation : On sait que $u_0 = 0,03$ et $u_1 = 0,03456$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0,2$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0,2$.

La fonction f étant croissante sur $[0; 0,2]$, on obtient $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0,2)$.

Or $f(0) = 0$ et $f(0,2) = 0,24 - 0,064 = 0,176$.

Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,176$.

Or $0,176 < 0,2$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,2$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0,2$.

3b. (0,5 pt) La suite (u_n) est croissante et majorée par $0,2$, donc elle converge vers une limite ℓ .

3c. (1 pt : 0,5 limite, 0,5 interprétation) La limite ne peut être égale qu'à 0 ou $0,125$ d'après la question **2a**.

Or (u_n) est croissante et de premier terme $u_0 = 0,03$, donc sa limite ne peut être que $\ell = 0,125$.

On en déduit que l'équilibre ne sera pas préservé, car le nombre d'insectes tend vers $125\ 000$.

4a. (1 pt) La valeur renvoyée est $n = 21$: cela signifie qu'au bout de 21 mois, le nombre d'insectes **dépassera 120 000** et l'équilibre du milieu ne sera plus préservé.

4b. (0,5 pt) L'exécution **échouera** à cause d'une boucle infinie : en effet, la suite (u_n) ne prend jamais de valeur supérieure à $0,2$ d'après la question **3a**.

Exercice 4 (3 pts)

Affirmation 1 : (1 pt, on attend un contre-exemple ou une explication)

Une suite décroissante et minorée par 0 converge, mais pas forcément vers 0 .

Par exemple, la suite $u_n = \frac{1}{n} + 1$ est décroissante et minorée par 0 , mais converge vers 1 . **Faux.**

Affirmation 2 : (1 pt) u_n correspond à la somme des termes d'une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $\frac{3}{4}$ est compris entre -1 et 1 . Donc par différence et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$. **Faux.**

Affirmation 3 : (1 pt) Si $x \in [0; 1[$, alors le facteur $(x - 1)$ est négatif. Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty$.

On applique alors le théorème de comparaison pour trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$. **Vrai.**