<u>Devoir surveillé sur les suites</u>

Exercice 1 *(4 pts)* Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies ci-dessous, en justifiant.

$$u_n = 4\sqrt{n} - \frac{1}{n^3} \qquad v_n = \frac{3n+1}{7n-5} \qquad w_n = 7 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2 *(5 pts)* Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2025.
On note (u_n) la suite modélisant le nombre d'arbres à l'année $2025 + n$. On a donc $u_0 = 400$.
1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60$.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 600 - 200 \times 0{,}9^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant.
5. L'arboriculteur risque-t-il de manquer de place dans son verger ? Justifier.

Exercice 3 *(8 pts)* Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude, la population est de 30 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 120 000.
Les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0{,}03$.
Ils admettent que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 1{,}6{u_n}^2$.
1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois selon ce modèle.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 0{,}2]$ par $f(x) = 1{,}2x - 1{,}6x^2$.
  a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
  b. Montrer que la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.
3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0{,}2$.
  b. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ la valeur de sa limite.
  c. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
  Déterminer la valeur de ℓ. Selon ce modèle l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ?
  Justifier la réponse.
4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.
  a. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.12)`.
  Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
  b. Que se passera-t-il si on tente d'exécuter `seuil(0.4)` ?
  Justifier.

```python
def seuil(a) :
  u = 0.03
  n = 0
  while u < a :
    u = 1.2*u - 1.6*u*u
    n = n + 1
  return n
```

Exercice 4 *(3 pts)* Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.
<u>Affirmation 1</u> : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
<u>Affirmation 2</u> : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.
<u>Affirmation 3</u> : Soit $x \in [0; 1[$. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = (x-1)e^n + \cos(n)$$

La suite (v_n) diverge vers $-\infty$.