

Devoir surveillé sur les suites

Exercice 1 (5 pts) Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On définit la suite (u_n) , pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \frac{3+\cos(n)}{n^2}$

Affirmation 1 : la suite (u_n) converge vers 0.

2. On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n^2}{n+2}$

Affirmation 2 : la limite de la suite (v_n) est $\frac{3}{2}$

3. On définit la suite (w_n) pour tout entier naturel n , par $w_n = n^2 + \frac{1}{2}$

Affirmation 3 : La suite (w_n) est géométrique.

Exercice 2 (9 pts)

Au 1^{er} janvier 2020, la centrale solaire de BigSun™ possédait 10 560 panneaux solaires.

On observe, chaque année, que 2% des panneaux solaires sont détériorés et nécessitent d'être retirés, tandis que 250 nouveaux panneaux sont installés.

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1^{er} janvier de l'année 2020 + n .

1. Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
2. On souhaite savoir à partir de quelle année le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 12\,500$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$ pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
 - b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 3 (7 pts)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -\frac{1}{3} ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $] -\frac{1}{3} ; +\infty[$
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . En justifiant, déterminer la valeur de ℓ .