

Chapitre 6 – Probabilités conditionnelles & loi binomiale

1. Probabilités conditionnelles

1a. Rappels sur les probabilités

Rappels sur les probabilités (les formules à savoir utiliser sont en rouge)

Pour tout événement A de l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on associe $p(A)$, « **probabilité de A** ». C'est un nombre compris entre 0 et 1. On a $p(\Omega) = 1$, et si $p(A) = 0$, on dit que l'événement A est impossible. La probabilité s'exprime généralement sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage.

$\bar{A}$, dit « non A », **représente le contraire de A** .

On a **$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$** : la somme des probabilités d'un événement et de son contraire est 1.

- $A \cap B$ est l'**intersection de A et de B** , dite « A inter B » ou « **A et B** ».

c'est un événement qui est réalisé si et seulement si A et B le sont en même temps.

- $A \cup B$ est l'**union de A et de B** , dite « A union B » ou « **A ou B** ».

c'est un événement qui est réalisé si et seulement si soit A , soit B , soit les deux sont réalisés.

On a **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$** .

Si on se contentait d'ajouter $p(A)$ et $p(B)$, on compterait deux fois les issues qui sont dans $A \cap B$.

Connaître la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire, c'est connaître **toutes les issues et leurs probabilités**.

Variables aléatoires, espérance & variance

Une **variable aléatoire** est un nombre X pouvant prendre des valeurs dépendant de l'issue de l'expérience.

Exemple : dans l'expérience aléatoire « lancer de deux dés », on peut appeler S la somme des deux lancers.

On a donc $p(S = 2) = \frac{1}{36}$; $p(S = 8) = \frac{5}{36}$; $p(S > 10) = \frac{3}{36}$...

Connaître la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire, c'est connaître **toutes les valeurs possibles et leurs probabilités**.

L'**espérance** d'une variable aléatoire est la **moyenne de ses valeurs, pondérée par les probabilités correspondantes**. Pour une variable X , on la note $E(X)$.

Exemple : $E(S) = 7$: le résultat moyen qu'on obtient en lançant deux dés est 7.

La **variance** d'une variable aléatoire est une **mesure de sa dispersion**. Pour une variable X , on la note $V(X)$. C'est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance. On a $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$

On s'intéresse aussi à l'**écart-type**, qui est la **racine carrée de la variance** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

1b. Probabilités conditionnelles

Définition : soient deux événements A et B tels que $p(B) \neq 0$

La **probabilité conditionnelle** de A sachant B, est le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

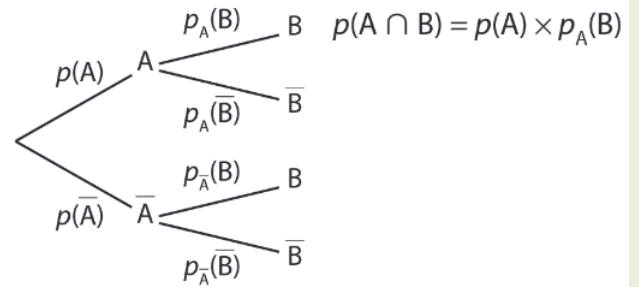
On a aussi $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Attention : ne pas confondre $p_B(A)$ et $p(A \cap B)$.

- $p_B(A)$ est la probabilité que A soit réalisé, **si on suppose que B est réalisé**.
- $p(A \cap B)$ est la probabilité que **A et B soit réalisés en même temps**, sans condition préalable.

Il faut bien lire les énoncés et la tournure des phrases pour comprendre de quelle probabilité il s'agit.

Remarque : dans un arbre pondéré, les probabilités du « premier niveau » sont **sans conditions**, les probabilités inscrites ensuite sont des **probabilités conditionnelles**.



Les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ correspondent à un « parcours d'arbre ».

Elles peuvent être obtenues en **multipliant entre elles** les probabilités écrites **sur les branches qui « mènent » à l'événement**.

Définition : deux événements A et B sont dit **indépendants** si $p(B) = p_A(B)$, c'est-à-dire si le fait que A soit réalisé n'influence pas la réalisation de B.

- Propriétés** :
- A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
 - Si A et B sont **indépendants**, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$ ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

1c. Formule des probabilités totales

- Soient A et B deux événements, avec $p(A)$ différente de 0 ou 1.

On a $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$$= p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

- Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, c'est-à-dire qu'un et un seul d'entre eux est réalisé lors d'une expérience :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

Exemple 1 La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus. Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie. On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif »

- Traduire la situation par un arbre pondéré.
- Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
- Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
- On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

a. • On crée l'arbre en commençant par l'événement dont on connaît la probabilité « simple », sans condition. Ici c'est M.

• On relit l'énoncé, en réécrivant les probabilités données sous forme mathématique. Par exemple, $p(M) = 0,4$; $p_M(T) = 0,9$ et $p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,85$.

• On pense à ajouter les probabilités des événements contraires.

b. La probabilité que « quelque chose et quelque chose », ce n'est pas une probabilité conditionnelle, c'est une intersection.

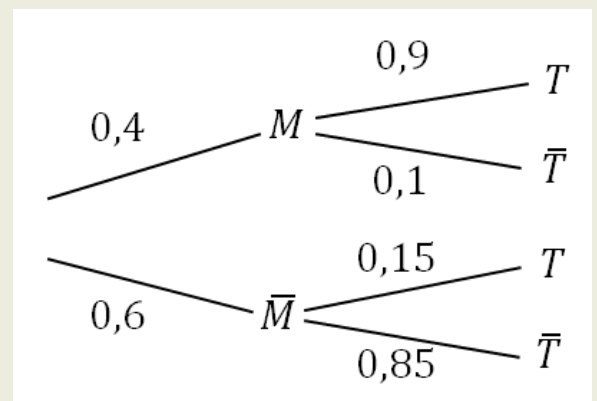
$$p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,4 \times 0,9 = \mathbf{0,36}.$$

c. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \bar{M}) = 0,36 + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) = 0,36 + 0,6 \times 0,15 = \mathbf{0,45}$$

d. Le « on choisit un chat » en début de question indique qu'on doit calculer une probabilité conditionnelle, « sachant T ». D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \mathbf{0,8}$$



Dans ces exemples, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

Exemple 2 D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)
On interroge une personne au hasard et on note :

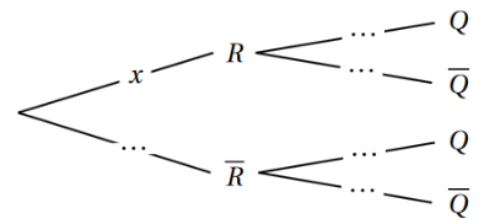
- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas les transports en commun est 0,055 6.
4. En déduire la proportion de jeunes parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Exemple 3 La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi. Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ». Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non », • 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui »
- On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

1. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Montrer que $x = 0,9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?



Exemple 2

1. Ci-contre :

2. $p(R \cap J) = p(R) \times p_R(J) = 0,17 \times 0,32 = \mathbf{0,0544}$

3. D'après l'énoncé, $p(J) = 0,11$.

Ici, nous cherchons $p(\bar{R} \cap J)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(J) = p(R \cap J) + p(\bar{R} \cap J)$$

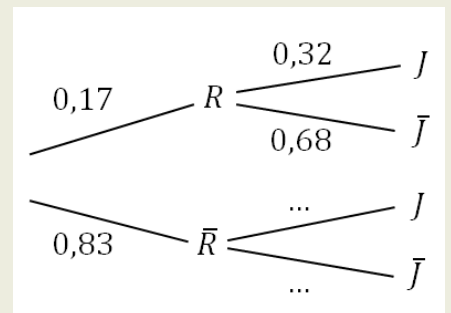
$$\Leftrightarrow 0,11 = 0,0544 + p(\bar{R} \cap J)$$

$$\Leftrightarrow p(\bar{R} \cap J) = 0,11 - 0,0544 = \mathbf{0,0556}$$

4.

$$p_{\bar{R}}(J) = \frac{p(\bar{R} \cap J)}{p(\bar{R})} = \frac{0,0556}{0,83} \approx \mathbf{0,067}$$

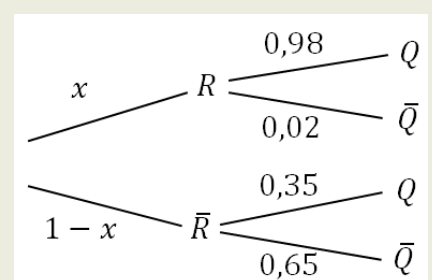
On compte environ 6,7% de jeunes parmi les utilisateurs non réguliers.



Exemple 3

1. Notez qu'on nous donne aussi $p(Q) = 0,917$, mais cette information ne peut figurer sur l'arbre.

2. On connaît $p(Q)$, et on cherche $p(R)$. La seule formule que l'on peut utiliser pour faire apparaître $p(Q)$ et $p(R)$ en même temps est la formule des probabilités totales, en décomposant $p(Q)$.



D'après la formule des probabilités totales :

$$p(Q) = p(Q \cap R) + p(Q \cap \bar{R})$$

$$\Leftrightarrow 0,917 = p(R) \times p_R(Q) + p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(Q)$$

$$\Leftrightarrow 0,917 = x \times 0,98 + (1 - x) \times 0,35$$

$$\Leftrightarrow 0,917 = 0,98x + 0,35 - 0,35x$$

$$\Leftrightarrow 0,63x = 0,567$$

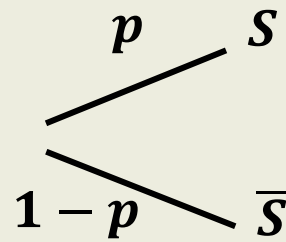
$$\Leftrightarrow x = \mathbf{0,9}$$

3.

$$p_Q(R) = \frac{p(Q \cap R)}{p(Q)} = \frac{p(R) \times p_R(Q)}{0,917} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \mathbf{0,962}$$

2. Loi de Bernoulli

2a. Épreuve de Bernoulli



Définition : une épreuve de Bernoulli

est une expérience à deux issues, notées S « succès » et $\bar{S}$ « échec ».

Définition : soit X la variable aléatoire valant **1 en cas de succès**, **0 en cas d'échec**. Si on note p la probabilité de succès, on dit que **X suit la loi de Bernoulli de paramètre p** .

Exemple 1 a. Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce et à regarder si elle tombe sur PILE est une épreuve de Bernoulli.

b. Donner la probabilité d'un succès « obtenir PILE » dans le cas où la pièce est équilibrée.

c. Donner la probabilité d'un succès « obtenir PILE » dans le cas où la pièce a deux fois plus de chance de tomber sur FACE que sur PILE.

Exemple 2 Fiona joue à Pierre-Feuille-Ciseaux. Expliquer pourquoi le choix de son adversaire (pierre, feuille ou ciseaux) à ce jeu n'est pas assimilable à une épreuve de Bernoulli.

Exemple 3

a. On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on considère la variable aléatoire X donnant le chiffre des dizaines du résultat obtenu. Justifier que X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p .

b. On lance deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à huit faces de 1 à 8. On considère la variable aléatoire Y donnant le chiffre des dizaines de la somme des deux nombres obtenus. Préciser la loi de Y .

Propriété : si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Exemple 1 a. Il s'agit d'une **expérience aléatoire à deux issues** : soit la pièce tombe sur Pile, soit elle ne tombe pas sur Pile.

b. Si cette pièce est équilibrée, la probabilité de succès est de **0,5**.

c. Soit p la probabilité recherchée. La probabilité d'échec $(1 - p)$ est deux fois plus grande que la probabilité de succès p . Ainsi, $1 - p = 2p \Leftrightarrow 3p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

La probabilité de succès est donc $\frac{1}{3}$.

Exemple 2 Il s'agit d'une expérience aléatoire comportant **trois issues** (pierre, feuille et ciseaux), donc cela ne correspond pas à une épreuve de Bernoulli.

Exemple 3 a. Le chiffre des dizaines X ne peut être que 0 ou 1, il suit donc une loi de Bernoulli. Il n'est égal à 1 que lorsque la face obtenue est 10, 11 ou 12.

La probabilité que ce chiffre soit 1 est $p = \frac{3}{12} = \mathbf{0,25}$.

b. À nouveau, le chiffre des dizaines Y ne peut être que 0 ou 1, il suit donc une loi de Bernoulli. Mais la probabilité de succès est plus difficile à calculer.

Il y a 32 issues possibles pour ce lancer de deux dés. Les issues qui correspondent à une somme égale à 10, 11 ou 12 sont : 2 et 8 ; 3 et 7 ; 3 et 8 ; 4 et 6 ; 4 et 7 ; 4 et 8. Il en existe 6. Ainsi, le paramètre p est $\frac{6}{32} = \mathbf{0,1875}$.

2b. Schéma de Bernoulli

Définition : la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes entre elles est appelé un **schéma de Bernoulli**.

Exemple 1

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa librairie, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.

Trois clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

- Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n , le nombre de répétitions, et p , la probabilité d'un succès.
- Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
- Calculer la probabilité que deux des trois clients achètent un livre, arrondie au centième.

Exemple 2

Sylvain joue cinq fois de suite à un jeu vidéo pour lequel sa probabilité de succès est 0,1.

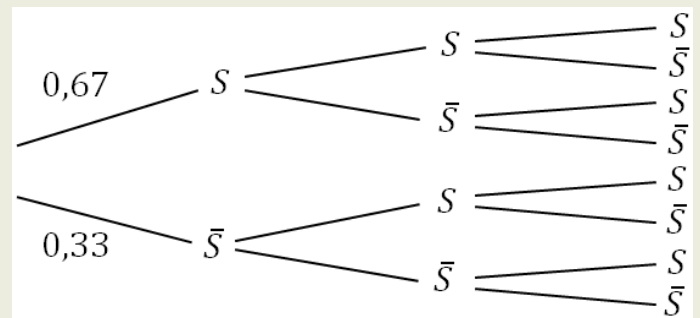
- Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces cinq parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
- Quelle est la probabilité qu'il perde ces cinq parties ?

Exemple 1

a. L'épreuve de Bernoulli « entrée d'un client » est **répétée 3 fois de façon identique et indépendante**.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,67$.

b. Ci-contre, en appelant S le « succès ». Les probabilités de S et $\bar{S}$ sont les mêmes sur toutes les branches.



c. Il existe 3 « parcours » qui correspondent à cette situation.

La probabilité de chacun de ces trois parcours est la même : $0,67 \times 0,67 \times 0,33$.

La probabilité que deux clients achètent est $3 \times 0,67 \times 0,67 \times 0,33 \approx 0,44$.

Exemple 2

a. Il s'agit déjà d'une répétition de 5 épreuves de Bernoulli identiques.

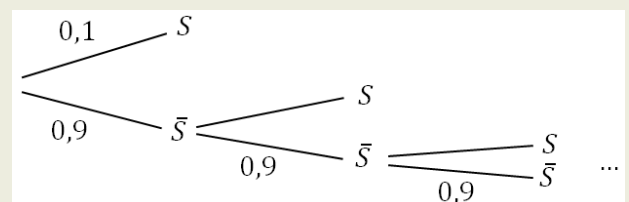
Pour que cela corresponde à un schéma de Bernoulli, il faut faire l'hypothèse que les parties sont **indépendantes**. *C'est un peu triste : cela signifie, par exemple, que Sylvain n'apprend pas de ses erreurs.*

b. Cela correspond à un seul parcours sur l'arbre (représenté partiellement ici) : celui où Sylvain enchaîne 5 défaites.

Il passe alors par 5 branches de probabilité 0,9.

La probabilité qu'il perde les 5 parties est donc

$0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,9^5 = 0,59049$. *Quel incapable.*



3. Loi binomiale

3a. Définition

Soit un schéma de Bernoulli à n répétitions, où la probabilité de succès est p . La **loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de succès sur ces n répétitions**, est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** , et se note $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale, il faut préciser qu'elle permet de dénombrer les succès de **plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**. On peut préciser quelle est l'épreuve et à quoi correspond le succès.

Exemple 1 On lance trois fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4 et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de PILE obtenus.

- Faire un arbre représentant la situation.
- Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
- Calculer $p(X = 3)$ et $p(X = 1)$.

Exemple 2 On tire 15 cartes avec remise dans un jeu complet de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de trèfles obtenus.

- Justifier que T suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- Calculer $p(T = 0)$ en donnant une valeur approchée à 10^{-5} .

Exemple 1 a.

b. *Il s'agit d'un modèle de rédaction que vous allez souvent devoir reproduire.*

X correspond au nombre de succès du schéma de Bernoulli dont l'épreuve « lancer une pièce » est répétée 5 fois de façon identique et indépendante.

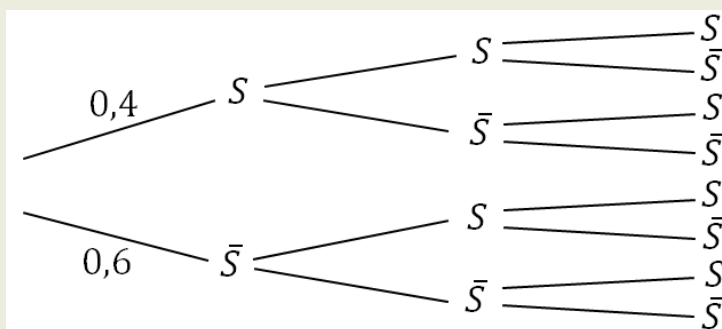
Ainsi, X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$** .

On peut abréger cette dernière phrase en écrivant $X \sim \mathcal{B}(3; 0,4)$.

c. L'événement $(X = 3)$ ne correspond qu'à 1 parcours : celui où on n'obtient que des succès. Ainsi, $p(X = 3) = 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,4^3 = \mathbf{0,064}$.

L'événement $(X = 1)$ correspond à 3 parcours où l'on obtient 1 succès et 2 échecs. La probabilité d'un de ces parcours est $0,4 \times 0,6 \times 0,6$.

Ainsi, $p(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2 = \mathbf{0,432}$.



Exemple 2 a. *Un quart des cartes d'un jeu sont des trèfles, d'où $p = 0,25$.*

T correspond au nombre de succès du schéma de Bernoulli dont l'épreuve « tirer » est répétée 15 fois de façon identique et indépendante.

Ainsi, X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$** .

b. Cela correspond à un seul parcours sur l'arbre, où l'on ne passe que par des échecs. $p(T = 0) = \mathbf{0,75^{15} \approx 0,013\ 36}$

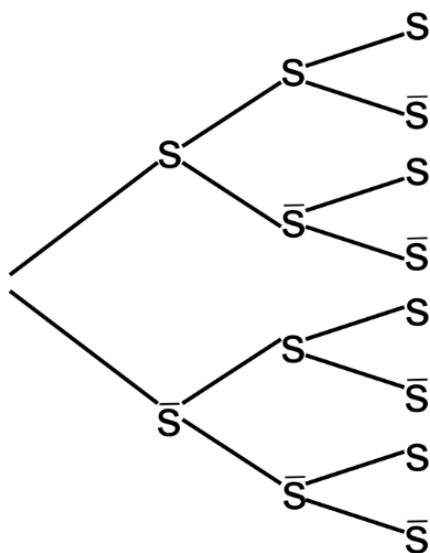
3b. Coefficients binomiaux

Définition : soit $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et n .

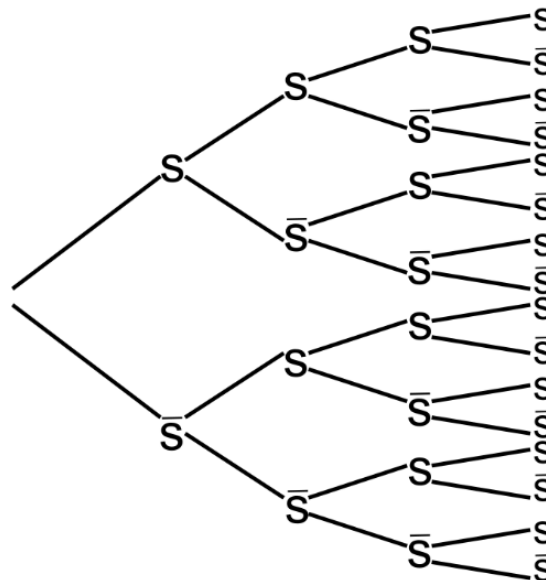
On note $\binom{n}{k}$ « k parmi n », le **nombre d'issues à k succès** dans un schéma de Bernoulli à n répétitions.

Les nombres de la forme $\binom{n}{k}$ s'appellent les **coefficients binomiaux**.

Avec 3 expériences de Bernoulli



Avec 4 expériences de Bernoulli.



$$\binom{3}{0} = \quad \binom{3}{1} = \quad \binom{3}{2} = \quad \binom{3}{3} =$$

$$\binom{4}{0} = \quad \binom{4}{1} = \quad \binom{4}{2} = \quad \binom{4}{3} = \quad \binom{4}{4} =$$

On remarque que la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour un n donné est égale à

$$\binom{3}{0} = 1 ; \binom{3}{1} = 3 ; \binom{3}{2} = 3 \text{ et } \binom{3}{3} = 1. \quad \binom{4}{0} = 1 ; \binom{4}{1} = 4 ; \binom{4}{2} = 6 ; \binom{4}{3} = 4 ; \binom{4}{4} = 1.$$

La somme des $\binom{n}{k}$ pour un n donné est égale à 2^n .

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour de grandes valeurs de n peuvent **se trouver à la calculatrice**.

On peut quand même noter quelques propriétés.

Pour tout n entier non nul, $\binom{n}{0} = \quad \binom{n}{1} = \quad$ et $\binom{n}{n} = \quad$ Par convention, on dit que $\binom{0}{0} =$

Par symétrie, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (il y a autant de chemins à k succès que de chemins à k échecs)

Formule de Pascal : Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2 et k entier compris entre 0 et $n - 2$.

$$\text{Alors } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Cette propriété permet de trouver les coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal.

Formule générale : Soit $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et n .

Si on note $n!$ le produit des entiers de 1 à n , c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$,

$$\text{alors } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{n} = 1. \text{ Par convention, } \binom{0}{0} = 1.$$

3c. Calcul de probabilités

Propriété : si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$,
pour tout k entier compris entre 0 et n :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

En particulier, $p(X = n) = p^n$ et $p(X = 0) = (1 - p)^n$

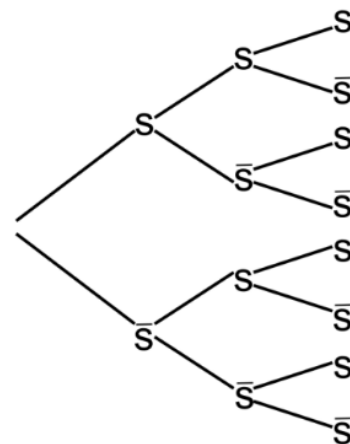
Exemple 1 : on lance trois fois une pièce non équilibrée où
la probabilité de tomber sur PILE est 0,7.
Soit X variable aléatoire représentant le nombre de PILE obtenus.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,7$.
On a donc $1 - p = 0,3$.

Ainsi, l'événement $(X = 2)$, par exemple, correspond bien à $\binom{3}{2} = 3$ parcours
qui ont tous une probabilité égale à

On a donc bien $p(X = 2) =$

Cette probabilité pourra aussi être calculée **directement à la calculatrice**.



Exemple 2 Une urne contient neuf boules rouges et une verte. On y tire onze boules avec remise et on considère la variable aléatoire V donnant le nombre de boules vertes obtenues.

- a. Donner la loi de V . b. Calculer $p(V = 2)$ en arrondissant au millièm.

Exemple 3 À l'arrivée d'un train Paris-Toulon dont le départ a eu lieu à 7 h 07 du matin, on demande à 10 passagers tirés au hasard s'ils ont dormi ou non durant le voyage et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant dormi parmi eux. Pour un train partant à cette heure, on considère que la probabilité qu'un passager s'endorme est 0,68.

On considère par ailleurs que les endormissements des uns et des autres sont indépendants.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
b. Calculer $p(X = 8)$, $p(X = 9)$ et $p(X = 10)$, en donnant une valeur approchée au millièm.
c. Quelle est la probabilité qu'au moins 8 personnes se soient endormies parmi les 10 ?

Exemple 1 L'événement $(X = 2)$ correspond à $\binom{3}{2} = 3$ parcours qui ont tous une probabilité égale à $0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,7^2 \times 0,3^1$.

Ainsi, $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,7^2 \times 0,3^1 = 3 \times 0,7^2 \times 0,3^1 = 0,441$

Exemple 2

a. On compte 1 boule verte sur les 10 boules, donc la probabilité de succès est $\frac{1}{10} = 0,1$.

V suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 11$ et $p = 0,1$.

On pourrait écrire $V \sim \mathcal{B}(11; 0,1)$.

b. D'après la formule, $p(V = 2) = \binom{11}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^9 \approx 0,213$

Exemple 3 *Il faut justifier, donc on utilise la phrase magique.*

a. X correspond au nombre de succès du schéma de Bernoulli dont l'épreuve « interroger un passager » est répétée 10 fois de façon identique et indépendante. Ainsi, X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,68$** .

Autrement dit, $X \sim \mathcal{B}(10; 0,68)$.

b. *La probabilité de succès est de 0,68, donc la probabilité d'échec est $1 - 0,68 = 0,32$.*

$$p(X = 8) = \binom{10}{8} \times 0,68^8 \times 0,32^2 \approx \mathbf{0,211}$$

$$p(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,68^9 \times 0,32^1 \approx \mathbf{0,099}$$

$$p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,68^{10} \times 0,32^0 = 0,68^{10} \approx \mathbf{0,021}$$

c. Au moins 8 personnes, cela correspond à 8, 9 ou 10 personnes : ce sont les 3 événements dont on a calculé les probabilités en question précédente.

$$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) \approx 0,211 + 0,099 + 0,021 \approx \mathbf{0,331}$$

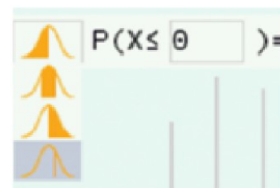
3d. Avec la calculatrice

Calculer des probabilités $p(X = k)$ ou $p(X \leq k)$ à la calculatrice Numworks

Soit X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,4$.

Calculer $p(X = 3)$:

- Dans le menu principal, on choisit **Probabilités** puis **Binomiale**.
- On règle les valeurs de n et p puis on valide.
- Avec les flèches, on sélectionne le type de courbe, ici c'est  qui nous intéresse.
- On saisi k (ici 3) dans le champ afin d'obtenir la probabilité voulue.



Calculer $p(X \leq 5)$:

On choisit  plutôt que .

Notez que ce menu permet aussi d'avoir des probabilités $p(X \geq k)$ et $p(k \leq X \leq k')$.

On peut aussi modifier la probabilité dans le champ de droite, ce qui permet par exemple de trouver le plus petit nombre k tel que $p(X \leq k) > 0,95$. Ce sera très utile dans la partie suivante et pour des exercices du bac.

Calculer des probabilités $p(X = k)$ ou $p(X \leq k)$ à la calculatrice Casio

Soit X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,4$.

Calculer $p(X = 3)$:

- Dans le menu de base **Exe-Mat**, on appuie sur la touche **OPTN** puis on sélectionne **STAT** avec **F5** puis **DIST** avec **F3** puis **BINOMIAL** avec **F5**.
- On sélectionne **Bpd**, ce qui affiche **BinomialPD(** à l'écran
- On complète cette ligne avec dans l'ordre k (ici 3), n (ici 11) et p (ici 0.4) séparés par des virgules, puis on ferme la parenthèse, afin d'obtenir **BinomialPD(3,11,0.4)**, puis on valide.

Calculer $p(X \leq 5)$:

On choisit **Bcd** plutôt que **Bpd**, on obtient donc **BinomialCD(5,11,0.4)**

Calculer des probabilités $p(X = k)$ ou $p(X \leq k)$ à la calculatrice TI

Soit X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,4$.

Calculer $p(X = 3)$:

- On accède au menu **distrib** en appuyant sur les touches **2^{nde}** puis **var**
- On sélectionne **A:binomFdp** dans le menu ci-contre
- On accède à un écran qui permet de rentrer n , p et k
- binomFdp(11,0.4,3)** est affiché à l'écran, on valide pour afficher $p(X = 3)$



Calculer $p(X \leq 5)$:

Dans le menu **distrib**, on sélectionne **B:binomFRép** plutôt que **A:binomFdp**. On obtient alors **binomFdp(11,0.4,5)**

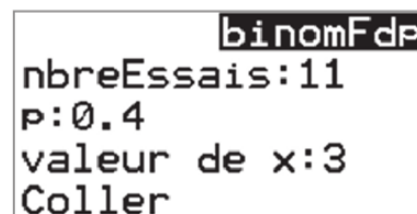


Tableau de valeurs : les fonctions **binomFdp** et surtout **binomFRép** peuvent être entrées comme des fonctions, afin d'afficher des tableaux de valeurs, notamment $p(X \leq k)$ en fonction de k .

Ce sera très utile dans la partie suivante et pour des exercices du bac.

Dans ces exemples, on donnera des valeurs approchées au millième.

Exemple 1 On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,23$.

Calculer : **a.** $p(X < 12)$ **b.** $p(X \geq 4)$ **c.** $p(5 < X \leq 8)$

Exemple 2 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,36)$

Calculer : **a.** $p(X > 6)$ **b.** $p(3 \leq X < 12)$ **c.** $p(X > 0)$ **d.** $p(X \in]7; 11])$

Les calculatrices ne permettent de calculer que des probabilités de la forme $p(X \leq k)$ (pour la Numworks, également $p(X \geq k)$ et $(k \leq X \leq k')$).

On essaie donc d'abord d'exprimer les probabilités d'une de ces trois façons avant d'utiliser la calculatrice).

Exemple 1

a. X étant un nombre entier, le fait qu'il soit strictement inférieur à 12 est équivalent au fait qu'il soit inférieur ou égal à 11. On applique cette logique dans tous les exemples pour n'avoir que des inégalités larges.

$$p(X < 12) = p(X \leq 11) \approx \mathbf{0,512}$$

b. Cette probabilité peut être calculée directement avec la Numworks. Pour les autres, on utilise le fait que le contraire de $(X \geq 4)$ est $(X < 4)$.

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx \mathbf{0,999}$$

c. Avec une Numworks, il suffit de réécrire ce calcul avec une inégalité large. Pour les autres, il faudra l'exprimer à l'aide d'une soustraction.

$$p(5 < X \leq 8) = p(6 \leq X \leq 8) \approx \mathbf{0,140}$$

$$\text{ou } p(5 < X \leq 8) = p(X \leq 8) - p(X \leq 5) \approx 0,156 - 0,016 \approx \mathbf{0,140}$$

Exemple 2

$$\mathbf{a.} \quad p(X > 6) = p(X \geq 7) \approx \mathbf{0,620}$$

$$\text{ou } p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) \approx \mathbf{0,620}$$

$$\mathbf{b.} \quad p(3 \leq X < 12) = p(3 \leq X \leq 11) \approx \mathbf{0,966}$$

$$\text{ou } p(3 \leq X < 12) = p(2 < X \leq 11) = p(X \leq 11) - p(X \leq 2) \approx 0,975 - 0,009 \approx \mathbf{0,966}$$

$$\mathbf{c.} \quad p(X > 0) = p(X \geq 1) \approx \mathbf{1} \text{ (on trouve en fait } 0,999867, \text{ soit } 1, \text{ arrondi au millième)}$$

$$\text{ou } p(X > 0) = 1 - p(X = 0) \approx \mathbf{1}$$

$$\mathbf{d.} \quad p(X \in]7; 11]) = p(7 < X \leq 11) = p(8 \leq X \leq 11) \approx \mathbf{0,411}$$

3e. Calculs en fonction de n

Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$. Les événements $(X < k)$ et $(X \geq k)$ étant contraires :

$$p(X \geq k) = 1 - p(X < k)$$

En particulier :

- $p(X = n) = p^n$ donc $p(X < n) = 1 - p(X = n) = 1 - p^n$
- $p(X = 0) = (1 - p)^n$ donc $p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$

Exemple 1 Une équipe d'ingénieurs travaille sur un nouveau modèle d'aspirateur-robot. Lorsqu'il rencontre un obstacle, l'aspirateur soit le détecte, soit se cogne avec une probabilité 0,001.

On effectue des tests sur l'aspirateur, qui rencontre n obstacles.

- Soit X le nombre de chocs subis par l'aspirateur. Quelle est la loi suivie par X ?
- Quelle est la probabilité que l'aspirateur ne se cogne jamais ?
- Combien d'obstacles l'aspirateur doit-il rencontrer, pour que la probabilité qu'il se cogne au moins une fois soit supérieure à 5% ?

Exemple 2 Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. On estime que 80% des acheteurs sont satisfaits de leur achat.

- Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits.

Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

- Déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

Exemple 3 Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets. Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 98 % des cachets ont une masse conforme.

Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Exemple 1 a. X correspond au nombre de succès du schéma de Bernoulli dont l'épreuve « rencontrer un obstacle » est répétée n fois de façon identique et indépendante. Ainsi, X suit la **loi binomiale de paramètres n et $p = 0,001$** .

b. On calcule $p(X = 0) = (1 - p)^n = (1 - 0,001)^n = 0,999^n$

c. La probabilité qu'il se cogne au moins une fois est :

$$p(X \geq 1) = p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,999^n$$

Ainsi, on résout l'inéquation $1 - 0,999^n \geq 0,05$

$$\Leftrightarrow -0,999^n \geq 0,05 - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,999^n \geq -0,95$$

$$\Leftrightarrow 0,999^n \leq 0,95$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,999^n) \leq \ln(0,95)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,999) \leq \ln(0,95)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,95)}{\ln(0,999)}$$

On se rappelle que $0,999 < 1$, donc $\ln(0,999)$ est un nombre négatif.

Or $\frac{\ln(0,95)}{\ln(0,999)} \approx 51,21$, ainsi l'aspirateur doit rencontrer **52 obstacles** pour que la probabilité de se cogner au moins une fois soit supérieure à 5%.

Exemple 2

1. X suit ici la loi $\mathcal{B}(30 ; 0,8)$. On utilise la calculatrice. $p(X \geq 25) \approx \mathbf{0,428}$.

2. X suit maintenant la loi $\mathcal{B}(n ; 0,8)$.

La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est :

$$p(X < n) = 1 - p(X = n) = 1 - 0,8^n$$

On résout donc l'inéquation $1 - 0,8^n \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow -0,8^n \geq 0,99 - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,8^n \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,8) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,64$, ainsi il faut contacter un minimum de **21 clients** pour que la probabilité que l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

Exemple 3

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cachets conformes sur une boîte de n cachets. D'après l'énoncé, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,98$

Ainsi, la probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est :

$$p(X = n) = 0,98^n$$

On résout donc l'inéquation $0,98^n > 0,5 \Leftrightarrow \ln(0,98^n) \geq 0,5 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}$

Ce dernier résultat est approximativement égal à 34,31, une boîte peut donc contenir un maximum de **35 cachets** pour respecter le critère.

4. Répartition et seuils

4a. Espérance et variance

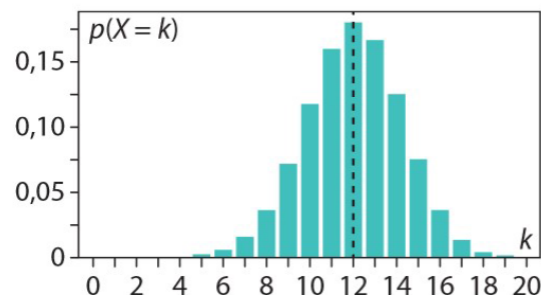
Propriété : si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$,

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

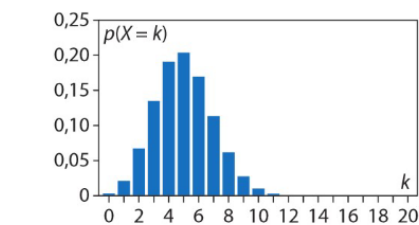
Pour X , variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p , le diagramme en barres associé est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

Exemple : ci-contre, le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(20; 0,6)$.

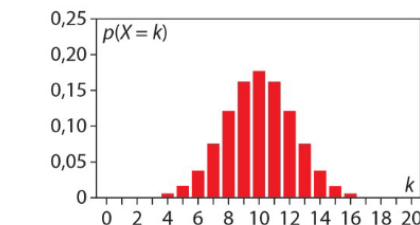
On y lit par exemple $p(X = 10) \approx 0,12$.



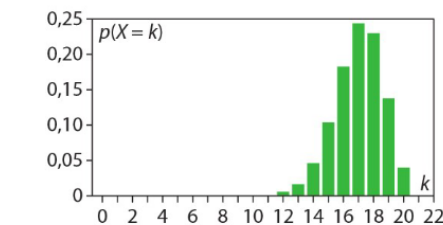
Plus p est éloigné de 0,5, plus l'écart-type est petit, c'est-à-dire que la cloche est « étroite et haute ».



X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,25)$, $E(X) =$



X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,5)$, $E(X) =$



X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,85)$, $E(X) =$

$$E(X) = 20 \times 0,25 = 5$$

$$E(X) = 20 \times 0,5 = 10$$

$$E(X) = 20 \times 0,85 = 17$$

4b. Problèmes de seuils

Soit X suivant une loi $\mathcal{B}(n; p)$.

On s'intéresse au plus petit k tel que $p(X \leq k)$ dépasse un certain seuil.

Exemple 1 Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, 7 % du temps il ne mange pas à la cantine.

a. Le personnel de la cantine ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les élèves se présentant auront un repas.

Déterminer k .

b. Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1 %.

Exemple 2 Dans une équipe de football, un défenseur discute d'une clause dans son contrat : il aura une prime s'il reçoit n cartons jaunes ou moins sur les 38 matchs de la saison. Il a remarqué que la probabilité qu'il prenne un carton jaune lors d'un match est de 0,15.

a. En admettant que les cartons jaunes reçus d'un match à l'autre soient indépendants, quelle doit être la plus petite valeur de n pour qu'il soit sûr au seuil de 99 % de toucher cette prime ?

b. Même question avec un risque de ne pas recevoir la prime inférieur à 10 %.

Exemple 1 *Le plus dur est de reformuler la question en utilisant les probabilités.*

a. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves qui se présentent effectivement à la cantine. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(237; 0,93)$.

Si k est le nombre de repas préparés, pour que tous les élèves puissent manger, il faut donc avoir $(X \leq k)$.

On cherche ainsi la plus grande valeur de k telle que $p(X \leq k) \geq 0,95$.

La calculatrice fournit **$k = 227$** .

b. Ici, on cherche k tel que $p(X \leq k) \geq 0,99$. On trouve que **$k = 229$** .

Exemple 2 *Un petit point perturbant ici : la variable appelée n ne correspond pas au paramètre de la loi binomiale.*

a. Soit X le nombre de cartons jaunes reçus par le joueur. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(38; 0,15)$.

On veut chercher la plus petite valeur de n telle que $p(X \leq n) \geq 0,99$.

On trouve **$n = 11$** .

b. Ici, on veut que la probabilité qu'il reçoive la prime soit supérieure à 90%.

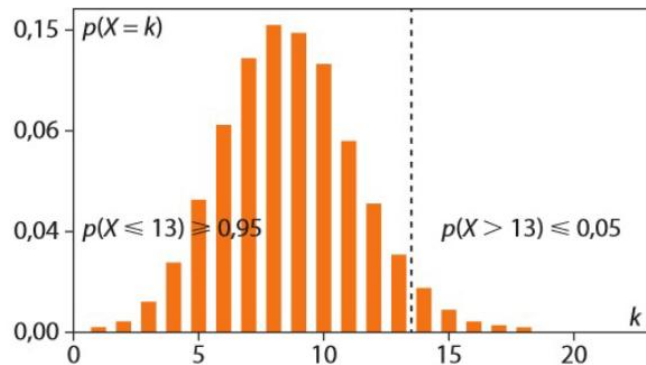
On cherche la plus petite valeur de n telle que $p(X \leq n) \geq 0,9$.

On trouve **$n = 9$** .

4c. Intervalles de fluctuation

Définition : soit X suivant une loi binomiale, $\alpha \in [0; 1]$ et a et b deux entiers. Si $p(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$, on dit que l'intervalle $[a; b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$** (ou au **risque α**).

Ici, l'intervalle $[0; 13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 (ou au risque 0,05).



L'intervalle $[4; 14]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% (ou au risque 5%).

On dit aussi que c'est un intervalle **centré** (sur 9).

