Correction des exercices sur les probabilités

Exercice 1

1. X correspond au nombre de succès du schéma de Bernoulli dont l'épreuve « interroger une personne » est répétée 50 fois de façon identique et indépendante. Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}17)$.

2. $p(X=5) = \binom{50}{5} \times 0{,}17^5 \times 0{,}83^{45} \approx 0{,}069$

3. On calcule $p(X < 13) = p(X \leq 12) \approx 0{,}929$. On a trouvé un résultat inférieur à 0,95, donc l'affirmation est fausse.

4. Il s'agit de calculer l'espérance $E(X) = 50 \times 0{,}17 = 8{,}5$ personnes en moyenne.

Exercice 2

1a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}24$.

1b. $p(X=1) = \binom{7}{1} \times 0{,}24^1 \times 0{,}76^6 \approx 0{,}32$

1c. $p(X \geq 2) \approx 0{,}53$.

2a. Si on appelle Y la nouvelle variable aléatoire égale au nombre de candidats admis dans cette configuration, alors Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}24$.

On a alors $p(Y=0) = (1-0{,}24)^n = 0{,}76^n$

2b. $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - 0{,}76^n$. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
&1 - 0{,}76^n \geq 0{,}99 \\
&\Leftrightarrow -0{,}76^n \geq -0{,}01 \\
&\Leftrightarrow 0{,}76^n \leq 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow \ln(0{,}76^n) \leq \ln(0{,}01) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0{,}76) \leq \ln(0{,}01) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}
\end{aligned}$$

ce dernier résultat étant approximativement égal à 16,78, c'est à partir de 17 candidats que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3

1a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}103$.

1b. $E(X) = 5 \times 0{,}103 = 0{,}515$. C'est le nombre moyen d'athlètes qui sont positifs au test de dopage.

1c. $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0{,}897^5 \approx 0{,}419$.

2. Le nombre d'athlètes contrôlés n'est donc plus forcément 5. X suit la loi $\mathcal{B}(n; 0{,}103)$.

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0{,}897^n$. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
&1 - 0{,}897^n \geq 0{,}75 \\
&\Leftrightarrow -0{,}897^n \geq -0{,}25 \\
&\Leftrightarrow 0{,}897^n \leq 0{,}25 \\
&\Leftrightarrow \ln(0{,}897^n) \leq \ln(0{,}25) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0{,}897) \leq \ln(0{,}25) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)}
\end{aligned}$$

ce dernier résultat étant approximativement égal à 12,75, c'est à partir de 13 athlètes contrôlés que la probabilité qu'au moins un athlète soit positif est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 4

1. On connait $p(S) = 0{,}08$, donc on mettra S et $\bar{S}$ sur les premières branches.

Ensuite, on pourra inscrire $p_S(I) = 0{,}9$ et $p_{\bar{S}}(I) = 0{,}01$.

2. a. On calcule $p(S \cap I) = p(S) \times p_S(I) = 0{,}08 \times 0{,}9 = 0{,}072$

b. D'après la formule des probabilités totales, $p(I) = p(S \cap I) + p(\bar{S} \cap I) = p(S) \times p_S(I) + p(\bar{S}) \times p_{\bar{S}}(I)$
$= 0{,}08 \times 0{,}9 + 0{,}92 \times 0{,}01 = 0{,}072 + 0{,}0092 = 0{,}0812$

Suite de la correction de l'exercice 4

c.

$$p_I(S) = \frac{p(S \cap I)}{p(I)} = \frac{0{,}072}{0{,}0812} \approx 0{,}89$$

3. a. Il s'agit d'une répétion indépendante de 50 épreuves de Bernoulli de paramètre 0,08.
La variable Z suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}08$
b. On calcule $p(Z \geq 2) \approx 0{,}92$ à la calculatrice.
Si votre calculatrice ne permet pas d'avoir $p(Z \geq 2)$ directement, n'oubliez pas que $Z \geq 2$ est le contraire de $Z \leq 1$, donc vous pouviez aussi calculer $1 - p(Z \leq 1)$.

Exercice 5 **1. a.** On tire simultanément, donc sans remise, deux lettres parmi les 8 lettres.
On a 8 choix possibles pour la première lettre, puis 7 choix possibles pour la seconde.
La réponse pourrait être $8 \times 7 = 56$, mais il convient de diviser ce nombre par 2. En effet, l'ordre n'est pas important : tirer A et B revient à tirer B et A. Ainsi, la réponse est $8 \times 7 \div 2 = 28$.
Nous verrons plus tard que ce nombre correspond à $\binom{8}{2}$.
b. On peut essayer de compter combien de tirages conviennent parmi les 28 possibles.
Si on tire d'abord A, alors il faut tirer B, C, D, F, G ou H (mais pas E) en deuxième : cela fait 6 tirages gagnants.
De même si on tire E en premier, alors il faut tirer B, C, D, F, G ou H en deuxième : cela fait 6 autres tirages.
Le cas où on tire une consonne en premier a déjà été traité ci-dessus, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte. Ainsi, il y a 12 tirages gagnants sur 28 : la probabilité de gagner est $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$
2. *Notez que l'indication de la question **2** permet comme souvent de vérifier la réponse de la question **1b**.*
a. Déterminer une loi de probabilité d'une variable, c'est déterminer toutes ses valeurs possibles, et les probabilités respectives. On peut le faire dans un tableau.
Ici, on peut soit gagner $10 - k$ euros, soit perdre $-k$ euros. On obtient donc le tableau :

$\boldsymbol{x}$	$10 - k$	$-k$
$\boldsymbol{p(G = x)}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

b. Le jeu est favorable au joueur si et seulement si son espérance est positive, c'est-à-dire si $E(G) \geq 0$.
Or $E(G) = \frac{3}{7}(10 - k) - k \times \frac{4}{7} = \frac{30}{7} - k$ et donc $E(G) \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{30}{7} \approx 4{,}3$
Il faut donc que k, qui est un entier, soit inférieur ou égal à 4 pour que le jeu soit favorable au joueur.
3. a. L'expérience est une succession de dix épreuves de Bernoulli indépendantes et dont la probabilité de succès est $\frac{3}{7}$. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{7}$.
b. $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^6 \approx 0{,}247$ (il n'est sans doute pas obligatoire de donner la formule, on s'attend à ce que vous utilisiez la calculatrice).
c. $p(X \geq 5) \approx 0{,}440$.
Si votre calculatrice ne permet pas d'avoir $p(X \geq 5)$ directement, n'oubliez pas que $X \geq 5$ est le contraire de $X \leq 4$, donc vous pouviez aussi calculer $1 - p(X \leq 4)$.
Il s'agie de la probabilité qu'au moins 5 joueurs gagnent leur partie.
d. On trouve à la calculatrice que le plus petit entier qui convient est 6. En effet, $p(X \leq 6) \approx 0{,}92$.
On pourrait même dire que l'intervalle $[0; 6]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 90%.

Exercice 6

1. On connait $p(A)=\frac{75}{300}=0{,}25$, et $p(\bar{A})=\frac{225}{300}=0{,}75$ donc on mettra A et $\bar{A}$ sur les premières branches.
Ensuite, on fait deux branches partant de A : $p_A(R_1)=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$ et $p_A(R_2)=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$
(si on veut, on peut aussi indiquer sur une troisième branche que $p_A(R_3)=0$)
Ensuite, trois branches partent de $\bar{A}$: $p_{\bar{A}}(R_1)=\frac{100}{225}=\frac{4}{9}$, $p_{\bar{A}}(R_2)=\frac{75}{225}=\frac{1}{3}$ et $p_{\bar{A}}(R_3)=\frac{50}{225}=\frac{2}{9}$.

2. a.

$$p(A\cap R_2)=p(A)\times p_A(R_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

2. b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(R_2)&=p(A\cap R_2)+p(\bar{A}\cap R_2)\\&=p(A)\times p_A(R_2)+p(\bar{A})\times p_{\bar{A}}(R_2)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. c.

$$p_{R_2}(A)=\frac{p(A\cap R_2)}{p(R_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

3. a. X peut prendre les valeurs $1, 2$ ou 3.
On a déjà $p(X=2)=p(R_2)=\frac{1}{3}$
On calcule $p(X=1)=p(R_1)=p(A\cap R_1)+p(\bar{A}\cap R_1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$
et $p(X=3)=p(R_3)=p(A\cap R_3)+p(\bar{A}\cap R_3)=0+\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{6}$

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3
$\boldsymbol{p(X=x_i)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. b. $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\approx 1{,}67$
Cela signifie qu'en moyenne, les candidats tentent environ 1,67 fois le permis avant de l'obtenir.

4. a. La probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ correspond à l'événement « parmi les n personnes, n'en tirer aucune qui a obtenu le permis à la 3ème tentative ».
Donc $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est la probabilité de « parmi les n personnes, en tirer au moins une qui a obtenu son permis à la 3ème tentative ».
(rappel : le contraire de « aucun » est « au moins un »)

b. Le programme cherchera la plus petite valeur de n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0{,}9$. Il renverra 13.
Cela signifie qu'il faut prendre au moins 13 personnes pour que la probabilité d'en tirer au moins une qui a eu son permis au 3ème essai soit supérieure à $0{,}9$.