Exercices sur la loi binomiale

Les exercices suivants sont extraits du bac (ce sont des sous-parties d'un exercice). Les arrondis, si nécessaires, sont à faire à 10^{-3}.

Exercice 1 D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.
1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $p(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 2 On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis dans une école est égale à 0,24.
1. On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école.
On donnera une réponse arrondie au centième.
c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école.
On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 3 Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.
1. Dans cette question 1., on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

<u>Exercices type Bac sur les probabilités</u>

<u>Exercice 4</u> Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).
Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir. On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :
• La probabilité que le courriel choisi soit classé « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
• La probabilité que le courriel choisi soit classé « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à $0{,}01$.

On note :
• S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
• I l'évènement « le courriel choisi est classé indésirable par le logiciel de messagerie ».
• $\bar{S}$ et $\bar{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2. **a.** Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à $0{,}072$.
b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.
On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?
b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ?
On donnera un résultat arrondi au centième.

<u>Exercice 5</u> Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
a. Déterminer la loi de probabilité de G.
b. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
a. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
c. Calculer $P(X \geq 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.
d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leq n) \geq 0{,}9$.

Exercice 6

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :
- la formation avec conduite accompagnée ;
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :
- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :
A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée » ;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation.
Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python `seuil` ci-contre, où `p` est un nombre réel appartenant à $]0; 1[$.

b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande `seuil(0,9)` ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(p):
  n = 1
  while 1-(5/6)**n <= p :
    n = n + 1
  return n
```