Correction des exercices type Bac sur les probabilités conditionnelles

Exercice 1

1. On commence par les événements C, S et E car c'est ceux dont on connait la probabilité. Pour les événements H et $\overline{H}$, on ne connait que des probabilités conditionnelles, donc on les met en second.

2. $p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = 0{,}3 \times 0{,}459 = 0{,}137\,7$

3. D'après la formule des probabilités totales, C, S et E formant une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} p(H) &= p(C \cap H) + p(S \cap H) + p(E \cap H) \\ &= p(C) \times p_C(H) + p(S) \times p_S(H) + p(E) \times p_E(H) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}459 + 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}25 \\ &= 0{,}137\,7 + 0{,}4 + 0{,}05 \\ &= 0{,}587\,7 \end{aligned}$$

4. Il s'agit de trouver $p_H(S)$, à ne pas confondre avec $p_S(H)$ qui lui était donné.

$$p_H(S) = \frac{p(S \cap H)}{p(H)} = \frac{0{,}4}{0{,}587\,7} \approx 0{,}681$$

Exercice 2

1. a. D'après l'énoncé, $p(G) = 0{,}2$.

C'est d'ailleurs une bonne idée d'écrire sur l'énoncé les noms des événements qui correspondent aux probabilités données.

b. $p(V) = 0{,}4$, donc $p(\bar{V}) = 0{,}6$.

$p_V(G) = 0{,}08$, donc $p_V(\bar{G}) = 0{,}92$.

Enfin, $p(G) = 0{,}2$ ne peut pas être écrit dans l'arbre.

2. $p(V \cap G) = p(V) \times p_V(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

3. C'est un peu plus difficile que d'habitude : on aimerait utiliser

$$p_{\bar{V}}(G) = \frac{p(\bar{V} \cap G)}{p(\bar{V})}$$

mais on ne connaît pas $p(\bar{V} \cap G)$. En revanche, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} & p(G) = p(V \cap G) + p(\bar{V} \cap G) \\ \Leftrightarrow\ & p(\bar{V} \cap G) = p(G) - p(V \cap G) \\ & \phantom{p(\bar{V} \cap G)} = 0{,}2 - 0{,}032 \\ & \phantom{p(\bar{V} \cap G)} = 0{,}168 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_{\bar{V}}(G) = \frac{p(\bar{V} \cap G)}{p(\bar{V})} = \frac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$$

Exercice 3

Pour ce genre d'exercice, il est recommandé de faire un arbre, même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé.

1. a. On applique la formule des probabilités totales. D'ailleurs, $V = \bar{U}$.

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E \cap U) + p(E \cap V) \\ &= p_U(E) \times p(U) + p_V(E) \times p(V) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}009 + 0{,}035 \\ &= 0{,}044 \end{aligned}$$

b. On cherche

$$p_E(U) = \frac{p(E \cap U)}{p(E)} = \frac{0{,}009}{0{,}044} = \frac{9}{44}$$

(on ne demande pas de valeur approchée).

2. Dans cette question, on n'a plus $p(U) = 0{,}3$. On ne connaît plus $p(E)$, du coup.
Soit x la probabilité $p(U)$. Ainsi, $p(V)$ est égal à $1 - x$.
On souhaiterait que $p_E(U)$ soit égal à 0,3. Or :

$$p_E(U) = \frac{p(E \cap U)}{p(E)} = \frac{x \times 0{,}03}{x \times 0{,}03 + (1-x) \times 0{,}05} = \frac{0{,}03x}{-0{,}02x + 0{,}05}$$

Or $p_E(U)$ doit aussi être égal à $\frac{3}{10}$. On fait un produit en croix :

$$10 \times 0{,}03x = 3(-0{,}02x + 0{,}05) \Leftrightarrow 0{,}3x = -0{,}06x + 0{,}15 \Leftrightarrow 0{,}36x = 0{,}15 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}15}{0{,}36} = \frac{5}{12}$$

Il faut donc que l'entreprise U fournisse $\frac{5}{12}$, et l'entreprise V fournit les $\frac{7}{12}$ restants.

Exercice 4

1. a. On a $p(A_2) = 0{,}9$ donc $p(\overline{A_2}) = 0{,}1$.
De même, $p_{A_2}(A_3) = 0{,}9$ et $p_{A_2}(\overline{A_3}) = 0{,}1$.
En revanche, $p_{\overline{A_2}}(\overline{A_3}) = 0{,}6$ et donc$p_{\overline{A_2}}(A_3) = 0{,}4$.
b. On applique la formule des probabilités totales.
$p(A_3) = p(A_2 \cap A_3) + p(\overline{A_2} \cap A_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 = 0{,}85$.
c.

$$p_{A_3}(A_2) = \frac{p(A_2 \cap A_3)}{p(A_3)} = \frac{0{,}81}{0{,}85} \approx 0{,}95$$

2. D'après l'énoncé, pour tout entier n supérieur à 1 :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\
&= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\
&= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
&= p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}4 \\
&= 0{,}5p_n + 0{,}4
\end{aligned}$$

3. *Ce sont des questions très classiques, je ne détaille pas la rédaction.*
a. On a $p_1 = 1 > 0{,}8$ et pour n supérieur à 1, $p_n > 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}5p_n + 0{,}4 > 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4 \Leftrightarrow p_{n+1} > 0{,}8$
b. On peut le redémontrer par récurrence, ou bien en calculant $p_{n+1} - p_n$ et en utilisant **3a.**
c. Elle est convergente car elle est décroissante et minorée par 0,8.

4. a. Pour n supérieur à 1, $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5p_n - 0{,}4 = 0{,}5(p_n - 0{,}8) = 0{,}5v_n$
donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 0{,}2$ et de raison 0,5.
b. C'est la formule du terme général des suites géométriques, mais avec un petit twist : le premier terme de la suite est d'indice 1.
Ainsi, pour n supérieur à 1, $v_n = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$ et donc $p_n = 0{,}8 + v_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$
c. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim_{n \to \infty} 0{,}5^{n-1} = 0$
Par somme, la limite de (p_n) est 0,8.