

Exercices type bac sur les probabilités conditionnelles

Les exercices suivants sont extraits du bac (ce sont souvent des sous-parties d'un exercice, indépendantes du reste).

Exercice 1

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,587 7.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?

On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Exercice 2

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

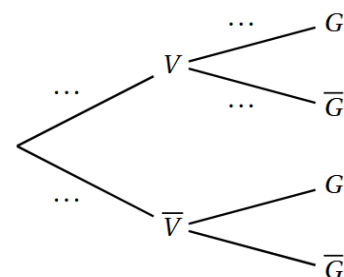
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. a. Donner la probabilité de l'événement G .
b. Reproduire l'arbre pondéré ci-contre et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.
2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.



Exercice 3

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin. On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les évènements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

- Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
- Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

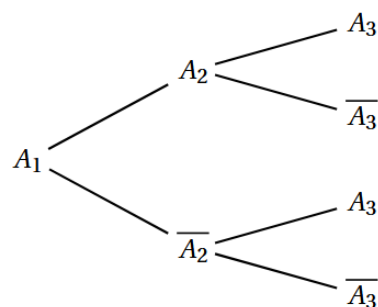
Exercice 4

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes. Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n > 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ». On a ainsi $p(A_1) = 1$.

- Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
 - Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
 - Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n > 1$: $p_n = p(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

- Démontrer que, pour tout entier $n > 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n > 1$: $p_n > 0,8$.
 - Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
 - La suite (p_n) est-elle convergente ?
- On pose pour tout entier $n > 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
 - Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que, pour tout $n > 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
 - Déterminer la limite de la suite (p_n) .