

Chapitre 7 – Primitives et équations différentielles

1. Définitions

1a. Équations différentielles

Une **équation différentielle** est une équation dont **l'inconnue est une fonction**, exprimée en fonction de sa dérivée et de la variable x .

Exemples : • $f'(x) = 2f(x)$ • $f(x)^2 - 4f'(x) = 0$ • $f'(x) = 2x + 1$

Remarque : pour abrégé, on note y à la place de $f(x)$.

Les exemples précédents se notent donc :

• $y' = 2y$ • $y^2 - 4y' = 0$ • $y' = 2x + 1$

Attention : ici, la **lettre y** représente donc une **fonction**, qui dépend de x .

Les équations différentielles ont été inventées par Newton, ce qui a permis d'utiliser l'analyse (l'étude de fonctions) pour résoudre la loi de la gravitation universelle et déterminer la trajectoire des planètes dans le système solaire. Plus tard, d'autres mathématiciens comme Leibniz, Euler et Lagrange ont étudié ces équations indépendamment de la physique. Elles servent maintenant dans de nombreuses autres disciplines.



Exemples a. Vérifier que l'équation $y' = 2x + 1$ a pour solution f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 3$

b. Vérifier que l'équation $y' - 2y = 0$ a pour solution la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x}$

c. Vérifier que l'équation $xy' + y = x$ a pour solution la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{2}x$

d. Chercher une solution de l'équation $y' = 2x$. Y en a-t-il d'autres ?

e. Même question avec l'équation $y' = y$.

f. Déterminer deux solutions (une triviale, et une autre plus élaborée) de l'équation $y' = y^2$.

Remarques • En Physique, une dérivée d'une fonction de variable t peut se noter $\frac{\partial y}{\partial t}$ ou $\frac{dy}{dt}$.

Ainsi, on écrit « $\frac{\partial y}{\partial t} - 5y = 0$ » à la place de « $y' - 5y = 0$ ».

• Une équation différentielle peut aussi mettre en jeu des **dérivées secondes**, par exemple $y'' - 4y' + y = 0$

qui s'écrirait en Physique $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial y}{\partial t} + y = 0$.

Un exemple de telles équations est $y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$ dont les solutions dépendent des racines d'un polynôme, et qui peuvent exploiter la fonction exponentielle, ou les fonctions cosinus et sinus.

a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 1$. La fonction f est donc bien une solution de l'équation $y' = 2x + 1$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x}$.

Ainsi, $g'(x) - 2g(x) = 2e^{2x} - 2 \times e^{2x} = 0$.

Donc **g est une solution** de l'équation $y' - 2y = 0$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $x \times h'(x) + h(x) = x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = x$

Donc **h est une solution** de l'équation $xy' + y = x$.

d. *Une fonction dont la dérivée est $2x$? On pense à...*

La fonction **$f(x) = x^2$** a bien pour dérivée $f'(x) = 2x$, donc c'est une solution de l'équation $y' = 2x$.

En fait, toutes les fonctions de la forme **$f(x) = x^2 + k$** où k est une constante conviennent.

e. *Une fonction qui est sa propre dérivée ? On en connaît une depuis la 1^{ère}.*

La fonction **$f(x) = e^x$** a bien pour dérivée $f'(x) = e^x$, donc c'est une solution de l'équation $y' = y$.

Toutes les fonctions de la forme **$f(x) = ke^x$** ou k est une constante conviennent.

f. *Une fonction dont la dérivée est son carré ? Plus difficile...*

La fonction nulle **$f(x) = 0$** convient, car $f'(x) = 0 = f(x)^2$.

On peut aussi penser à **$f(x) = -\frac{1}{x}$** dont la dérivée est $f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

Or $(f(x))^2 = \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$ donc f est bien solution de l'équation $y' = y^2$.

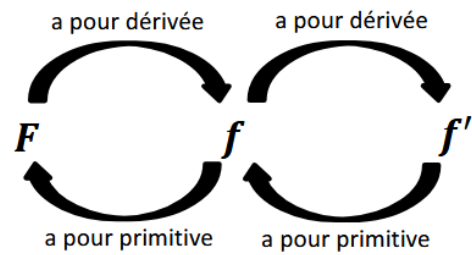
1b. Primitives

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

Une **primitive** de f est une **solution de l'équation différentielle $y' = f$** .
Autrement dit, c'est une fonction F telle que tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi, la primitive est la **notion réciproque de la dérivée**.

Mais attention : nous verrons qu'une fonction dérivable n'a qu'une dérivée, mais a une infinité de primitives.



Exemples Dans chaque cas, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 6x \quad f_2(x) = x \quad f_3(x) = 7 \quad f_4(x) = x^4 \quad f_5(x) = \frac{1}{x} \quad f_6(x) = 2x - 3 \quad f_7(x) = e^x$$

Dans chaque cas, il nous faut donc trouver une fonction dont la dérivée est la fonction f proposée.

- f_1 a pour primitive F_1 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_1(x) = 3x^2$.
- f_2 a pour primitive F_2 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ (autrement dit, $\frac{x^2}{2}$)
- f_3 a pour primitive F_3 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_3(x) = 7x$.
- f_4 a pour primitive F_4 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_4(x) = \frac{1}{5}x^5$ (autrement dit, $\frac{x^5}{5}$)
- f_5 a pour primitive F_5 définie pour $x \in]0; +\infty[$ par $F_5(x) = \ln(x)$.
- f_6 a pour primitive F_6 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_6(x) = x^2 - 3x$.
- f_7 a pour primitive F_7 définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F_7(x) = e^x$.

1c. Primitives et constantes

Propriétés :

- Toute fonction continue admet des primitives sur son ensemble de définition.
- Si f est une fonction et F une de ses primitives, alors f admet une infinité de primitives. Elles sont de la forme $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 1 Donner quelques primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$.

Exemple 2 Soit f une fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

- Vérifier que la fonction F définie sur $] -1; 1[$ par $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ est bien une primitive de f .
- En déduire l'expression de toutes les primitives de f .

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$.

Existe-t-il des primitives de la fonction f qui soient décroissantes sur $\mathbb{R}$?

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)e^{-x+1}$.

On considère aussi une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x+1}$, où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f .

Exemple 1 f admet pour primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 4 \times \frac{x^3}{3} = \frac{4x^3}{3}$.

Ainsi, f admet pour primitives toutes les fonctions de la forme $F(x) = \frac{4x^3}{3} + k$.

Par exemple, $F(x) = \frac{4x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{4x^3}{3} - 7,5$; $F(x) = \frac{4x^3}{3} + 1\,000...$

Exemple 2 a. On se rappelle que la dérivée des fonctions de la forme $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$.

Pour $x \in] -1; 1[$,

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$$

Comme $F'(x) = f(x)$, F est bien une primitive de f .

b. Les primitives de f sont donc de la forme $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + k$.

Exemple 3 Soit F une primitive de f . F a donc pour dérivée f .

Or $f(x)$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc F ne peut pas être décroissante. La réponse est donc non.

Exemple 4 Il faut qu'en dérivant F , on retrouve l'expression de f . Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = ae^{-x+1} + (ax+b) \times (-e^{-x+1}) = (a - ax - b)e^{-x+1} = f(x)$$

On doit donc avoir $a - ax - b = 2x - 3$. Cela implique que $-ax = 2x \Leftrightarrow a = -2$ et $a - b = -3 \Leftrightarrow -2 - b = -3 \Leftrightarrow b = 1$. Ainsi, $F(x) = (-2x + 1)e^{-x+1}$

2. Calcul de primitives

2a. Primitives usuelles

La fonction f telle que	admet comme primitives les fonctions F	sur l'ensemble
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k, k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$	$] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n > 1)$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k, k \in \mathbb{R}$	$] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

2b. Opérations sur les primitives

Propriétés : soient f et g deux fonctions admettant respectivement les primitives F et G .

- une primitive de $f + g$ est $F + G$
- une primitive de $-f$ est $-F$
- pour λ réel, une primitive de λf est λF .

On peut donc trouver des primitives par combinaisons linéaires, mais attention : à cause des produits et quotients de dérivées, **il n'y a pas de formule pour le produit ou le quotient de primitives.**

Ainsi, la fonction $F \times G$ n'est en général pas une primitive de $f \times g$!

Exemple 1 Déterminer toutes les primitives de ces fonctions.

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 7 \quad g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3) \quad h(x) = \frac{5 - 3\sqrt{x}}{x}$$

Exemple 2 Résoudre les équations différentielles suivantes : **a.** $y' = 12x^5 - x$ **b.** $y' = e^{x+3}$

Exemple 1

- Les primitives de f sont de la forme :

$$F(x) = \frac{5}{3} \times \frac{x^4}{4} - 7x + k = \frac{5}{12}x^4 - 7x + k$$

- On ne peut pas directement donner la primitive d'un produit, mais :

$$g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

Donc les primitives de g sont de la forme :

$$G(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - 3 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3x + k = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + k$$

- On ne peut pas non plus donner la primitive d'un quotient, mais :

$$h(x) = \frac{5 - 3\sqrt{x}}{x} = \frac{5}{x} - \frac{3\sqrt{x}}{x} = \frac{5}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Donc les primitives de h sont de la forme :

$$H(x) = 5 \times \ln(x) - 3 \times 2\sqrt{x} + k = 5 \ln(x) - 6\sqrt{x} + k$$

Exemple 2

La consigne est en fait la même, car résoudre l'équation différentielle $y' = f$ revient à trouver les primitives de f .

- a.** Les primitives de $f(x) = 12x^5 - x$ sont de la forme :

$$F(x) = 12 \times \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} + k = 2x^6 - \frac{1}{2}x^2 + k$$

- b.** La fonction $f(x) = e^{x+3}$ peut se réécrire $f(x) = e^3 e^x$.

Ses primitives sont de la forme $F(x) = e^3 e^x + k$.

2c. Conditions initiales

Définition : Une fonction f admettant une infinité de primitives, on peut rechercher une primitive F vérifiant $F(a) = b$ pour a et b réels. Cela s'appelle des **conditions initiales**.

Exemple 1 a. Soit $f: x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.
b. Déterminer celle qui prend en e la valeur 0.

Exemple 2 a. Montrer que la fonction $F: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln$.
b. Déterminer l'unique primitive de la fonction $\ln$ qui s'annule en 1.

Exemple 3 a. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$.
Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x + 1)e^{3x}$ est une primitive de f .
b. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 5.

Exemple 1 a. Les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + \ln x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
b. $F(e) = 0 \Leftrightarrow e^3 + \ln e + k = 0 \Leftrightarrow e^3 + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -e^3 - 1$.
Donc la primitive recherchée a pour expression $F(x) = x^3 + \ln x - e^3 - 1$

Exemple 2 a. Pour $x > 0$:

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Donc F est bien une primitive de la fonction $\ln$.

b. Soit G la primitive recherchée. G est de la forme $F(x) + k = x \ln x - x + k$.

Or $G(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \times \ln 1 - 1 + k = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Donc $G(x) = x \ln x - x + 1$ est la primitive recherchée.

Exemple 3 a. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = 2e^{3x} + (2x + 1) \times 3e^{3x} = e^{3x}(2 + 3(2x + 1)) = e^{3x}(6x + 5) = f(x)$$

Donc F est bien une primitive de f .

b. Soit G la primitive recherchée. G est de la forme $F(x) + k = (2x + 1)e^{3x} + k$.

Or la condition de l'énoncé signifie que $G(0) = 5$.

$$\text{Et } G(0) = 5 \Leftrightarrow (2 \times 0 + 1)e^{3 \times 0} + k = 5 \Leftrightarrow 1 + k = 5 \Leftrightarrow k = 4.$$

Donc $G(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ est la primitive recherchée.

2d. Primitives et composées

Propriété : Soient u et v dérivables sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto u'(x) \times v(u(x))$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto v(u(x))$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction	admet comme primitive à une constante près	avec les conditions pour tout $x \in I$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$u'u$	$\frac{u^2}{2}$	
$\frac{u'}{u^n} \ (n > 1)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	

Exemple 1 Dans chaque cas, déterminer une primitive des fonctions f , g et h sur l'intervalle I considéré.

$$f(x) = 2xe^{x^2+7} ; I = \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} ; I =]-1; +\infty[\quad h(x) = -\frac{e^{7x}}{e^{7x}+1} ; I = \mathbb{R}$$

Exemple 2 Dans chaque cas, donner la solution f des équations différentielles telle que C_f passe par $(x_0; y_0)$.

$$(E_1) : y' = e^{5x} + e^{-\frac{x}{2}} ; x_0 = 0 ; y_0 = 0,5 \quad (E_2) : y' = 12x(x^2 + 1)^3 ; x_0 = 1 ; y_0 = 10$$

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $I =]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2. En déduire les primitives de f .

Exemple 1

• f est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 + 7$.

Donc $F(x) = e^{x^2+7}$. On vérifie que la dérivée de F est bien f .

- g ressemble à la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ mais il manque le 2, et on n'a pas exactement u' au numérateur (il faudrait avoir $3x^2$ au lieu de x^2). Dans ce cas, on réécrit g en la multipliant/divisant par des constantes pour faire apparaître la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

On a donc multiplié le numérateur par 3 pour obtenir le $3x^2$, et divisé par 3 pour compenser. Idem avec le 2 : on a multiplié le dénominateur par 2, et multiplié par 2 pour compenser.

g est de la forme $\frac{2}{3} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3 + 1$. Donc $G(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 1}$.

- h ressemble à la forme $\frac{u'}{u}$ mais il manque un 7.

$$h(x) = -\frac{e^{7x}}{e^{7x}+1} = -\frac{1}{7} \times \frac{7e^{7x}}{e^{7x}+1}$$

h est de la forme $-\frac{1}{7} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{7x} + 1$. Donc $H(x) = -\frac{1}{7} \ln(e^{7x} + 1)$.

Exemple 2

- Il s'agit de déterminer la primitive F de $f(x) = e^{5x} + e^{-\frac{x}{2}}$ telle que $F(0) = 0,5$.
On essaye de faire apparaître la forme $u'e^u$ pour chaque terme.

$$f(x) = e^{5x} + e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{5} \times 5e^{5x} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

Donc les primitives de f sont de la forme $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - 2e^{-\frac{x}{2}} + k$. Or :

$$F(0) = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}e^{5 \times 0} - 2e^{-\frac{0}{2}} + k = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0,2 - 2 + k = 0,5$$

$$\Leftrightarrow k = 0,5 - 0,2 + 2 = 2,3$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - 2e^{-\frac{x}{2}} + 2,3.$$

- Il s'agit de trouver la primitive G de $g(x) = 12x(x^2 + 1)^3$ telle que $G(1) = 10$.
On essaye de faire apparaître la forme $u'u^3$.

$$g(x) = 12x(x^2 + 1)^3 = 6 \times 2x(x^2 + 1)^3$$

Donc les primitives de g sont de la forme :

$$G(x) = 6 \times \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + k = 1,5(x^2 + 1)^4 + k$$

$$\text{Or } G(1) = 10 \Leftrightarrow 1,5(1^2 + 1)^4 + k = 10 \Leftrightarrow 1,5 \times 16 + k = 10$$

$$\Leftrightarrow k + 24 = 10 \Leftrightarrow k = -14.$$

$$\text{Ainsi, } G(x) = 1,5(x^2 + 1)^4 - 14.$$

Exemple 3

1. On essaye de réduire l'expression demandée au même dénominateur pour trouver les valeurs de a et de b .

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)^2 + bx^2}{x^2(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x^2 - 2x + 1) + bx^2}{x^2(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 2xa + a + bx^2}{x^2(x-1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $ax^2 - 2xa + a + bx^2 = 2x - 1$.

Cela implique qu'à gauche, le terme en x^2 soit nul, donc $a + b = 0$.

Il faut également avoir $-2xa = 2x \Leftrightarrow a = -1$.

On en déduit alors $a + b = 0 \Leftrightarrow -1 + b = 0 \Leftrightarrow b = 1$. Ainsi :

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

2. Le premier terme est une dérivée de la fonction inverse, le deuxième est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Ainsi :

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + k, k \in \mathbb{R}$$

3. Équations différentielles linéaires

3a. Équations homogènes $y' = ay$

Propriété : Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ ont pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exemple 1

- Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y' + 5y = 0$.
- Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(1) = 2$.
- Déterminer le sens de variation de f .

Exemple 2

Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telles que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids P du moment.

Pour certaines espèces de coton, $\frac{dP}{dt} = 0,21P$.

- Déterminer la forme de la fonction P .
- Évaluer le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

Exemple 3

Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f , qui à l'altitude x en kilomètres associe la pression atmosphérique en hectopascal, est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,12y = 0$ et qui vérifie $f(0) = 1\,013,25$.

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
 - Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale.
- En utilisant la fonction f :
 - Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.
 - Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.

Exemple 1 Notez que dans les équation différentielles, la constante K est multiplicative, et non additive comme dans les primitives.

a. $4y' + 5y = 0 \Leftrightarrow 4y' = -5y \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{4}y$.

Donc les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = Ke^{-\frac{5}{4}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. $f(1) = 2 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{5}{4}} = 2 \Leftrightarrow K = \frac{2}{e^{-\frac{5}{4}}} = 2e^{\frac{5}{4}}$

Ainsi, $f(x) = 2e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{5}{4}x}$

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{\frac{5}{4}} \times \left(-\frac{5}{4}\right) e^{-\frac{5}{4}x} = -2e^{\frac{5}{4}} \times \frac{5}{4} e^{-\frac{5}{4}x}$

Ce produit étant négatif, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

1. L'équation se réécrit $y' = 0,21y$, donc les solutions sont de la forme $P(t) = Ke^{0,21t}$.

2. Attention, P s'exprime ici en grammes. 70 mg = 0,07 g, donc l'énoncé nous dit que $P(0) = 0,07 \Leftrightarrow Ke^{0,21 \times 0} = 0,07 \Leftrightarrow K = 0,07$.

Ainsi, $P(t) = 0,07e^{0,21t}$. Donc le poids de la plante à la fin du mois est :

$$P(30) = 0,07e^{0,21 \times 30} = 0,07e^{6,3} \approx \mathbf{38,12 \text{ g}}$$

Exemple 3

1a. L'équation se réécrit $y' = -0,12y$ donc les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{-0,12x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

1b. $f(0) = 1\,013,25 \Leftrightarrow Ke^{-0,12 \times 0} = 1\,013,25 \Leftrightarrow K = 1\,013,25$.

Donc $f(x) = \mathbf{1\,013,25e^{-0,12x}}$

2a. Il s'agit de calculer $f(0,15) = 1\,013,25e^{-0,12 \times 0,15} \approx \mathbf{995,17 \text{ hPa}}$.

2b. Plus compliqué : déterminons x tel que :

$$f(x) = 900$$

$$\Leftrightarrow 1\,013,25e^{-0,12x} = 900$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,12x} = \frac{900}{1\,013,25}$$

$$\Leftrightarrow -0,12x = \ln\left(\frac{900}{1\,013,25}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{900}{1\,013,25}\right)}{-0,12} \approx \mathbf{0,988 \text{ km}}$$

3b. Équations $y' = ay + b$

Propriété : Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ ont pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exemple 1 Soit l'équation différentielle $y' - 5y = 3$.

a. Donner la solution générale de cette équation différentielle.

b. Déterminer la solution f telle que $f(0) = -\frac{6}{5}$

c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

d. Résoudre l'inéquation $f(x) < -100$.

Exemple 2

Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en minutes). On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $Q'(t) = 0,1 - kQ(t)$.

1. Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et t .

2. La limite de $Q(t)$ en $+\infty$ dépend-elle de k ? Interpréter dans le contexte.

3. Calculer k sachant qu'au bout de 3 heures, Q est égale à la moitié de la valeur limite.

Exemple 1

a. L'équation se réécrit $y' = 5y + 3$.

Les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{5x} - \frac{3}{5}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

b. $f(0) = -\frac{6}{5}$

$$\Leftrightarrow Ke^{5 \times 0} - \frac{3}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow K = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Donc } f(x) = -\frac{3}{5}e^{5x} - \frac{3}{5}$$

c. • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{3}{5} \times 5 \times e^{5x} = -3e^{5x}$. Cette dérivée est négative pour tout x donc f est **décroissante sur** $\mathbb{R}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x} = 0$ donc par produit puis somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{5}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x} = +\infty$ donc par produit puis somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d. $f(x) < -100$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}e^{5x} - \frac{3}{5} < -100$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}(e^{5x} + 1) < -100$$

$$\Leftrightarrow e^{5x} + 1 > -100 \times \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{5x} + 1 > \frac{500}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{5x} > \frac{497}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5x > \ln\left(\frac{497}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{497}{3}\right)}{5} \approx 1,02$$

Exemple 2

1. L'équation se réécrit $y' = -ky + 0,1$.

Les solutions sont de la forme $Q(t) = Ke^{-kt} - \frac{0,1}{-k} = Ke^{-kt} + \frac{0,1}{k}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Or $Q(0) = 0 \Leftrightarrow Ke^{-k \times 0} + \frac{0,1}{k} = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{0,1}{k}$

Ainsi, $Q(t) = -\frac{0,1}{k}e^{-kt} + \frac{0,1}{k}$

2. k étant positif, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$ donc par produit puis somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \frac{0,1}{k}$.

Cette limite dépend effectivement de k . Cela signifie que plus la constante k est élevée, moins la quantité de pénicilline sera élevée à long terme.

3. Le temps t étant en minutes, l'énoncé nous dit que $(180) = \frac{0,1}{k}$. Ainsi :

$$-\frac{0,1}{k}e^{-k \times 180} + \frac{0,1}{k} = \frac{0,1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,1}{k}(-e^{-k \times 180} + 1) = \frac{1}{2} \times \frac{0,1}{k}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-k \times 180} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-k \times 180} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-k \times 180} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -180k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -180k = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{180}$$

3c. Équations $y' = ay + \varphi$

Propriété : Soit φ une fonction dérivable. On considère l'équation (E) :

$$y' = ay + \varphi$$

Soit P une solution particulière de (E).

Alors toutes les solutions de (E) sont toutes de la forme $f + P$,
où f est une solution de l'équation homogène (E_0): $y' = ay$.

Cela signifie que pour trouver toutes les solutions de l'équation (E) de la forme $y' = ay + \varphi$, il faut :

- connaître une **solution particulière** de l'équation (E), souvent donnée. Notons-la P .
- résoudre l'équation homogène $y' = ay$ (souvent notée (E_0)), qui a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$.
- les solutions de (E) sont alors de la forme $x \mapsto Ke^{ax} + P$.

Exemple 1 On cherche à résoudre l'équation (E) : $2y' + 3y = 6x + 1$

- Vérifier que la fonction $P : x \mapsto 2x - 1$ est solution de l'équation (E).
- En déduire toutes les solutions de (E).

Exemple 2 On cherche à résoudre l'équation (E): $y' = y + e^x$

- Montrer que la fonction $g(x) = xe^x$ est solution de (E).
- En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
- Déterminer la fonction solution de (E) qui prend en 1 la valeur 2.

Exemple 1

a. Si $P(x) = 2x - 1$, alors $P'(x) = 2$.

Calculons alors $2P'(x) + 3P(x) = 2 \times 2 + 3(2x - 1) = 4 + 6x - 3 = 6x + 1$.

On trouve bien le membre de droite, donc **la fonction P est une solution particulière** de l'équation (E).

b. L'équation (E) se réécrit $2y' + 3y = 6x + 1 \Leftrightarrow 2y' = -3y + (6x + 1)$

L'équation homogène associée est (E_0): $2y' = -3y \Leftrightarrow y' = -1,5y$.

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont de la forme $x \mapsto Ke^{-1,5x}$.

Donc les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = Ke^{-1,5x} + 2x - 1, K \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

a. Si $g(x) = xe^x$, alors $g'(x) = 1e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

Or $g(x) + e^x = xe^x + e^x = (1 + x)e^x = g'(x)$.

Donc g est bien solution de l'équation (E): $y' = y + e^x$.

b. L'équation homogène associée est $y' = y$. Les solutions de cette équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^x$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = Ke^x + xe^x, K \in \mathbb{R}$.

c. $f(1) = 2 \Leftrightarrow Ke^1 + 1e^1 = 2 \Leftrightarrow Ke + e = 2 \Leftrightarrow Ke = 2 - e \Leftrightarrow K = \frac{2-e}{e}$.

Donc $f(x) = \frac{2-e}{e}e^x + xe^x$