

Correction des exercices type bac sur les équations différentielles

Exercice 1

1. a. D'après l'énoncé, les baguettes sortent du four à 225°C. On a donc $f(0) = 225$.

b. L'équation $y' + 6y = 150 \Leftrightarrow y' = 6y + 150$ a pour solution générale les fonctions :

$$t \mapsto Ke^{-6t} - \frac{150}{-6} = Ke^{-6t} + 25$$

avec K réel.

c. $f(0) = 225 \Leftrightarrow Ke^{6 \times 0} + 25 = 225 \Leftrightarrow K + 25 = 225 \Leftrightarrow K = 200$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 200e^{-6t} + 25$

2. Pour $t \geq 0$, $f'(t) = -6 \times 200e^{-6t} = -1200e^{-6t} < 0$, donc f est bien décroissante.

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 200e^{-6t} + 25 = 25$ donc f tend bien vers la température ambiante.

3. f est continue, strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$,

et on a $f(0) = 250$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 25$, donc $f(0) > 40 > \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 2

A1. La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses là où la courbe $\mathcal{C}_1$ change de sens de variation (l'inverse n'étant pas vrai). Donc g' correspond à $\mathcal{C}_2$ et g correspond à $\mathcal{C}_1$.

A2. La tangente a pour équation $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = g'(0)x + g(0)$.

Or d'après la courbe $\mathcal{C}_1$, $g(0) = 1$, et d'après la courbe $\mathcal{C}_2$, $g'(0) = 2$.

Donc l'équation est bien $y = 2x + 1$.

B1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$.

On calcule donc $f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$.

Ainsi, f_0 est bien une solution particulière de (E) .

B2. $y + y' = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ et cette équation homogène (E_0) a pour solutions les fonctions de la forme

$f(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

B3. Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = Ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

B4. g est de la forme $g(x) = Ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. Déterminons la valeur de K .

$g(0) = 1$ d'après la partie A, donc $Ke^{-0} + (0^2 + 3 \times 0)e^{-0} = 1 \Leftrightarrow K = 1$.

Ainsi, $g(x) = 1e^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

B5. Soit f une solution de (E) . f est de la forme $f(x) = Ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$

soit $f(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

On a alors $f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + K) \times (-e^{-x}) = (-x^2 - x + 3 - K)e^{-x}$

Ainsi, $f''(x) = (-2x - 1)e^{-x} + (-x^2 - x + 3 - K) \times (-e^{-x}) = (x^2 - x - 4 + K)e^{-x}$

Le signe de $f''(x)$ ne dépend que du polynôme $(x^2 - x - 4 + K)$.

Il faut donc chercher les valeurs de K telles que le polynôme admet deux racines, c'est-à-dire que le discriminant soit strictement positif.

Soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4 + K) = 1 - 4(-4 + K) = 17 - 4K$ le discriminant.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 17 - 4K > 0 \Leftrightarrow 4K < 17 \Leftrightarrow K < 4,25$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont les fonctions de la forme $f(x) = Ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$ avec $K < 4,25$.

Exercice 3

A1. On a $h'(t) = 0$, et ainsi $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{0,48}{120} = \frac{48}{12\,000} = \frac{1}{250}$

Donc h est bien solution de (E_1) .

A2. L'équation homogène se réécrit $y' = -0,48y$ et les solutions sont de la forme $f(t) = Ke^{-0,48t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

A3. Ainsi, les solutions de (E_1) sont de la forme $f(t) = Ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

B1. Soit p une solution de l'équation (E_2) . On sait alors que $p = \frac{1}{y}$ et que $p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$.

Mais alors $y = \frac{1}{p}$ donc

$$y' = -\frac{p'}{p^2} = -\frac{\frac{1}{250}p \times (120 - p)}{p^2} = -\frac{0,48p - \frac{1}{250}p^2}{p^2} = -\frac{0,48p}{p^2} + \frac{\frac{1}{250}p^2}{p^2} = -0,48\frac{1}{p} + \frac{1}{250} = -0,48y + \frac{1}{250}$$

soit $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$. Ainsi, y est bien une solution de (E_1) .

B2. Soit y une solution de (E_1) . Alors $y(t) = Ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $K \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{Ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120\left(Ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}\right)} = \frac{120}{1 + 120Ke^{-0,48t}}$$

Or si K est une constante réelle, $120K$ est également une constante réelle.

Donc $p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0,48t}}$ avec K constante réelle.

B3.

$$p(0) = 30 \Leftrightarrow \frac{120}{1 + Ke^{-0,48 \times 0}} = 30 \Leftrightarrow \frac{120}{1 + K} = 30 \Leftrightarrow \frac{120}{30} = 1 + K \Leftrightarrow 4 = 1 + K \Leftrightarrow K = 3$$

B4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$ donc par produit et somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3e^{-0,48t} = 1$ et par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$.

La population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

B5. On résout l'inéquation $p(t) \geq 60$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} \geq 60 \Leftrightarrow 120 \geq 60(1 + 3e^{-0,48t}) \Leftrightarrow 2 \geq 1 + 3e^{-0,48t} \Leftrightarrow 1 \geq 3e^{-0,48t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq e^{-0,48t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) \geq -0,48t \Leftrightarrow \frac{\ln(3)}{0,48} \geq t$$

ce dernier nombre étant approximativement égal à 2,289. Ainsi, le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2,289 heures soit 2 heures et 17 minutes.

Exercice 4

1. On a $f(0) = 3$.

Le coefficient directeur de la tangente en 0 semble être -2 , donc $f'(0) = -2$.

2. $f(0) = e^0 + a \times 0 + b \times e^{-0} = 1 + b$. Or $f(0) = 3$ donc $b = 2$.

3. a. On dérive f comme une somme (attention, ne pas oublier que la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$)

Pour x réel, $f'(x) = e^x + a - be^{-x} = e^x + a - 2e^{-x}$

b. $f'(0) = e^0 + a - 2e^{-0} = a - 1$.

c. Or $f'(0) = -2$, donc $a - 1 = -2$ et ainsi $a = -1$.

4. (Notez que l'expression de la fonction g valide ce qu'on a trouvé à la question 3)

a. Pour x réel, on considère $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

Sa dérivée est $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$

Et on a bien $g'(x) + g(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x} = 2e^x - x - 1$

donc g est bien solution de (E) .

b. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

c. On connaît g , une solution particulière de (E) , ainsi que les solutions de l'équation homogène associée.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-x} + g(x)$,

c'est-à-dire $x \mapsto Ke^{-x} + e^x - x + 2e^{-x}$, soit $x \mapsto Ke^{-x} + e^x - x$ où $K \in \mathbb{R}$.