Exercices type bac sur les équations différentielles

Exercice 1

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. a. Préciser la valeur de $f(0)$.

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

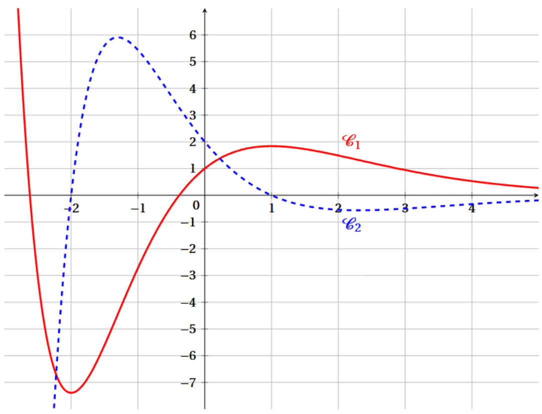
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

Exercice 2

Partie A

On donne dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'. On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Exercice 3

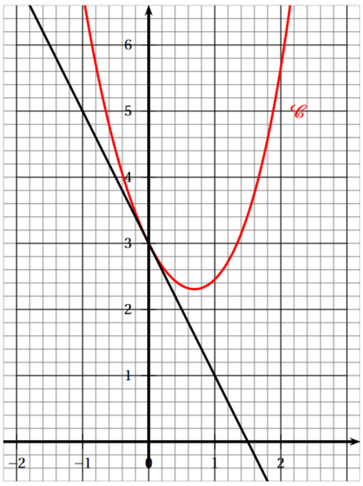
Partie A On considère l'équation différentielle $(E_1): y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$
où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(E_2): p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$
Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle$[0; +\infty[$ telle que, pour tout $t \in [0; +\infty[$ on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$
1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1): y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{120}{1+Ke^{-0{,}48t}}$ avec K constante réelle.
3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$
où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b
et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4. On considère l'équation différentielle $(E): y' + y = 2e^x - x - 1$.

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x + 2e^x$ est solution de (E).
b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).