Chapitre 8 – Orthogonalité dans l'espace

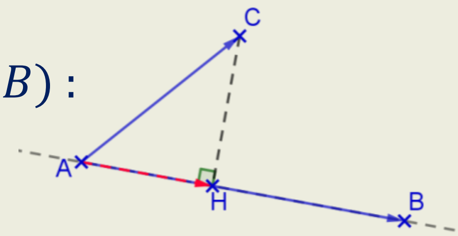
1. Produit scalaire dans l'espace

1a. Trois définitions

Définition : Le produit scalaire dans l'espace de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, est égal au produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC).

Propriétés : Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

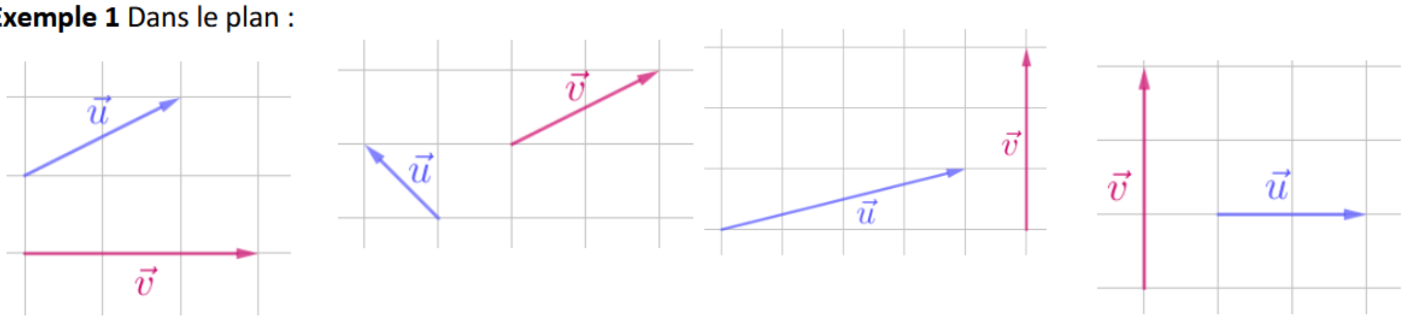
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AH}} \text{ ont même sens} \\ -AB \times AH \text{ sinon} \end{cases}$$

Plus deux vecteurs « ont une grande norme et vont dans le même sens », plus leur produit scalaire sera grand.

Exemple 1 Dans le plan :



$\vec{u}.\vec{v} =$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} =$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} =$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} =$

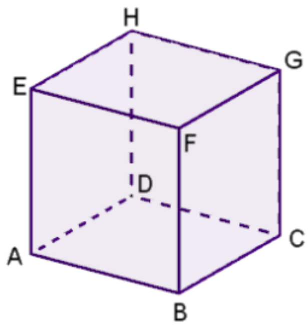
Exemple 2 **a.** On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

b. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 60°$. Calculer leur produit scalaire.

c. Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Déterminer la longueur AC.

d. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner la valeur en degré, arrondie à 0,01 près, de l'angle qu'ils forment.

e. Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 5, calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$, puis $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DC}$ et enfin $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}$.



Exemple 1 Dans l'ordre, on trouve $\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{6}$, $\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{2}$, $\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{3}$ et $\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{0}$.

Exemple 2 a. On calcule $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 4 = \mathbf{3}$

b. $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 2\sqrt{3} \times 3 \times \frac{1}{2} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

d. On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Or $AB = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

et $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Donc $AC = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} = \frac{6}{3\sqrt{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

d. $\vec{u}.\vec{v} = -1 \times 3 + (-3) \times (-2) + 0 \times 1 = 3$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

Donc comme $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$,

on a $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{10}\times\sqrt{14}}$

La fonction *arccos* nous donne un angle d'environ $\mathbf{75,31°}$

e. • Le projeté orthogonal du point F sur la droite (AB) est le point B.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB = 5 \times 5 = \mathbf{25}$

• Le vecteur $\overrightarrow{BE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CH}$. On calcule donc $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{DC}$

Le projeté orthogonal du point H sur la droite (DC) est le point D.

Ainsi, $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC} = -DC \times DC = -5 \times 5 = \mathbf{-25}$.

• Le projeté orthogonal du point G sur la droite (AC) est le point C.

Ainsi, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = AC \times AC$

Il nous faut d'abord calculer la distance AC : d'après le théorème de Pythagore,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 50$, donc $AC = \sqrt{50}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG} = AC \times AC = \sqrt{50}^2 = \mathbf{50}$.

1b. Autres propriétés

Propriété : Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ainsi qu'un réel k. Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

• Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

• Bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

On a de plus les égalités suivantes :

• Identité remarquable : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

• Formules de polarisation :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

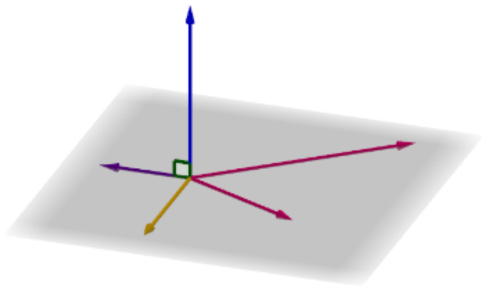
Propriété : Soient deux points A et B. La distance AB est la racine carrée du produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par lui-même, c'est-à-dire : $AB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ et $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2. Orthogonalité

2a. Vecteurs orthogonaux

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Dans l'espace, contrairement au plan, deux vecteurs peuvent être orthogonaux à un même troisième vecteur tout en ayant des directions différentes.
Ci-contre, le vecteur bleu est orthogonal aux quatre autres vecteurs.
(de plus, les vecteurs violet et jaune sont aussi orthogonaux entre eux)



Exemple 1 Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\-0{,}25\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{6}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\\\sqrt{8}\end{pmatrix}$

Exemple 2 Dans chaque cas, déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Exemple 3 Soient quatre points $A(-1;2;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;1;1)$ et $D(-0{,}5;1;4)$.
On considère un point M appartenant au segment $[CD]$. On a alors $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ avec $k \in [0;1]$.
a. Exprimer les coordonnées du point M en fonction de k.
b. Existe-t-il un point M sur le segment $[CD]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Définition : Soit une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ / un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de vecteurs de l'espace.
Si les **trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$** sont **orthogonaux deux à deux**, on dit que c'est une base / un repère **orthogonal·e**.
Si de plus les trois vecteurs ont la **même norme**, c'est une base / un repère **orthonormé·e**.

Exemple 1 a. On calcule $\vec{u}.\vec{v} = 1\times 2 + 3\times(-1) + 4\times(-0{,}25) = 0$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.
b. On calcule $\vec{u}.\vec{v} = 1\times\sqrt{3} + \sqrt{6}\times\sqrt{2} + (-\sqrt{2})\times\sqrt{8}$
$= \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{16} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4 = 3\sqrt{3} - 4$
Or $3\sqrt{3} \neq 4$ donc $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas orthogonaux.**

Exemple 2 a. Il faut trouver un vecteur $\vec{n}$ qui est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, ce qui n'est pas forcément simple à deviner. Soient $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ses coordonnées.

On a $\vec{n}.\vec{u} = x + y + z$
et $\vec{n}.\vec{v} = 3x + y + 2z$.
On doit avoir $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$
Remarque importante : si $\vec{n}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
*Ainsi, dans ce genre de problème, **on peut choisir la valeur d'une coordonnée**, par exemple x. On essaie de choisir une valeur et une coordonnée qui nous arrangent.*

Prenons $x = 1$. On a alors :
$\begin{cases} 1 + y + z = 0 \\ 3 + y + 2z = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - 1 \\ 3 + (-z - 1) + 2z = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - 1 \\ 2 + z = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - 1 \\ z = -2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$
Ainsi, on trouve le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$
On peut bien vérifier que $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

b. *Essayons de deviner sans appliquer la méthode du a. Soit* $\vec{\mathrm{n}}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$.

Pour avoir $\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{u}} = 0$, *on pourrait prendre* $\mathrm{x} = 1$, *et* $\mathrm{z} = -3$ *pour compenser. La valeur de* y *n'a pas d'importance.*
Donc pour avoir $\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{v}} = 0$, *si on a déjà* $\mathrm{x} = 1$, *on prend* $\mathrm{y} = -1$.
Le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ convient bien : on a $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

Exemple 3 a. L'égalité sur les vecteurs nous donne :
$$\begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 1 \\ z_M - 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5k + 1 \\ 1 \\ 3k + 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi, $\boldsymbol{M}(\mathbf{-1,5}\boldsymbol{k} + \mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{3}\boldsymbol{k} + \mathbf{1})$.
b. Il s'agit de déterminer si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ peuvent être orthogonaux.
$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -1 - (-1{,}5k + 1) \\ 2 - 1 \\ 1 - (3k + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5k - 2 \\ 1 \\ -3k \end{pmatrix}$$
et $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 1 - (-1{,}5k + 1) \\ -1 - 1 \\ 2 - (3k + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5k \\ -2 \\ -3k + 1 \end{pmatrix}$
Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (1{,}5k - 2\,) \times 1{,}5k + 1 \times (-2) - 3k \times (-3k + 1)$
soit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2{,}25k^2 - 3k - 2 + 9k^2 - 3k = 11{,}25k^2 - 6k - 2$
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 11{,}25 \times (-2) = 126$
Ses racines sont
$$k_1 = \frac{6 - \sqrt{126}}{2 \times 11{,}25} \approx -0{,}23 \quad \text{et } k_2 = \frac{6 + \sqrt{126}}{2 \times 11{,}25} \approx 0{,}77$$
Or $k_2 \in [0; 1]$, ce réel correspond donc à un point $\boldsymbol{M}$ **du segment [CD] tel que** $\boldsymbol{MAB}$ **est rectangle en** $\boldsymbol{M}$.

2b. Droites orthogonales

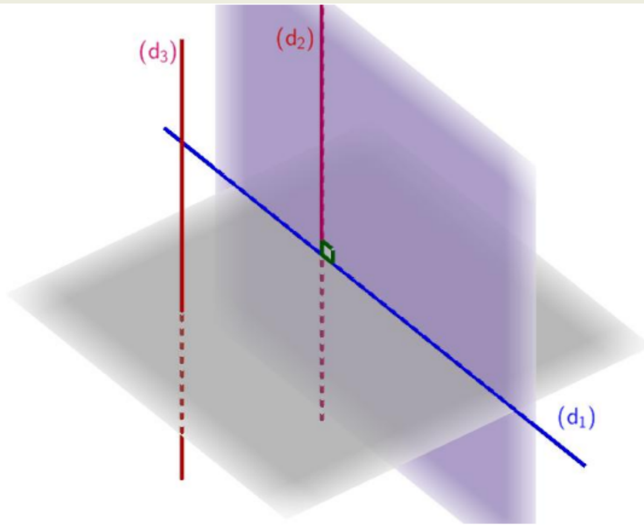
Définition : Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

Propriété : C'est le cas si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Ci-contre, (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires, et (d_2) et (d_3) sont parallèles.

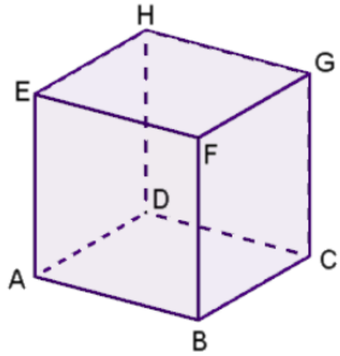
Ainsi, (d_1) et (d_3) sont non coplanaires, mais leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

(d_1) et (d_3) sont donc orthogonales.



Exemple 1 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. Que peut-on dire de :

a. (AE) et (HG) ? **b.** (BF) et (GF) ? **c.** (DC) et (EF) ?
d. (FH) et (DH) ? **e.** (EB) et (AD) ? **f.** (AF) et (FC) ?



Exemple 2 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère :

$P(1;0;4)$; $R(3;2;4)$; $U\left(\frac{2}{3};\frac{1}{4};2\right)$; $D\left(0;\frac{11}{12};4\right)$

Les droites (PR) et (UD) sont-elles orthogonales ? Justifier.

Exemple 1

a. (AE) et (HG) sont **parallèles**. **b.** (BF) et (GF) sont **perpendiculaires**.
c. (DC) et (EF) sont **parallèles**. **d.** (FH) et (DH) sont **perpendiculaires**.
e. (EB) et (AD) sont **orthogonales**.
En effet, (AD) est parallèle à (EH), qui est perpendiculaire à (EB).
f. (AF) et (FC) sont **sécantes**, mais pas perpendiculaires (ni orthogonales).

Exemple 2 On calcule $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UD}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$.

On a alors $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{UD} = 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\times\frac{2}{3} + 0\times 2 = 0$ donc (PR) et (UD) sont **orthogonales**.

On n'a pas déterminé si elles sont sécantes, et donc perpendiculaires : il faudrait pour cela déterminer leurs représentations paramétriques, puis résoudre le système comme dans le précédent chapitre de géométrie dans l'espace.

2c. Droite orthogonale à un plan

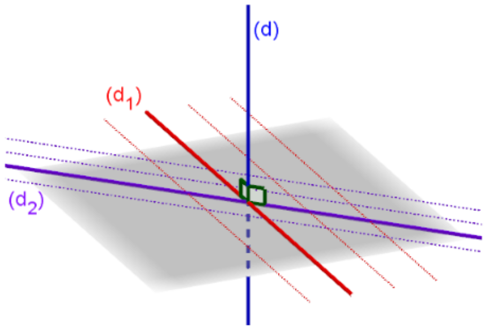
Définition : Une droite est dite orthogonale (ou perpendiculaire) à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété : C'est le cas si et seulement si :

- un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs définissant le plan.
- la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Définition : Deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont dits orthogonaux ou perpendiculaires si $(\mathcal{P}_1)$ contient une droite (d) orthogonale à $(\mathcal{P}_2)$.

Ci-contre, la droite (d) est orthogonale au plan.
Elle est perpendiculaire à (d_1) et (d_2) et orthogonale à toutes les droites du plan, en particulier celles en pointillés, qui sont parallèles à (d_1) ou (d_2)/

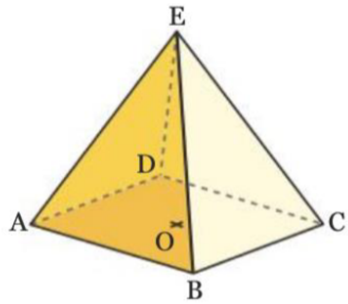


Exemple 1 On considère (d) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 5 - t \end{cases}$

et le plan (P) défini par le point $A(3;0;1)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (P).

Exemple 2 $ABCDE$ est une pyramide à base carrée telle que toutes les faces issues de E sont des triangles isocèles. On note O le centre du carré $ABCD$.
Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).



Exemple 1 *On utilise le premier point de la propriété.*

D'après sa représentation paramétrique, (d) est dirigée par $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\vec{a}.\vec{u} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + (-1) \times (-4) = 0$
et $\vec{a}.\vec{v} = 2 \times 5 + (-3) \times 3 + (-1) \times 1 = 0$
Donc le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ainsi, **la droite (d) est orthogonale au plan (P).**

Exemple 2 *On utilise le deuxième point de la propriété.*
D'après la définition de la pyramide, le triangle AEC est isocèle en E.
Or (EO) passe par le sommet E et le milieu du côté $[AC]$: c'est la médiatrice du côté $[AC]$. Ainsi $(EO) \perp (AC)$. De même,$(EO) \perp (DB)$.
Ainsi (EO) est orthogonale à (AC) et (DB), deux droites sécantes du plan (ABC).
Donc **la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).**

3. Vecteur normal, équation d'un plan

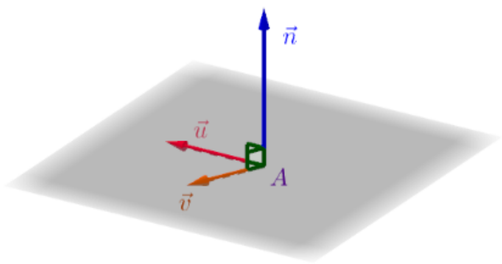
3a. Vecteur normal à un plan

Définition : Soit un plan $\mathcal{P}$ défini pour un point A, et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à ce plan si il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Cela signifie que pour tout point $M \in \mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

On savait qu'un plan était déterminé par la donnée d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Mais un plan peut également être **déterminé par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$**, orthogonal à tous les vecteurs obtenus à partir de points du plan.



Un plan admet une **infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires**. Quand on cherche un vecteur normal à deux vecteurs, on peut fixer une coordonnée du vecteur recherché *(exemple 1b)*.

Exemple 1 Soit un plan défini par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1;5;0)$.

a. Vérifier que les deux vecteurs permettent bien de définir un plan.

b. Déterminer un vecteur normal à ce plan.

Exemple 2 Soit un plan $\wp$ passant par le point $A(2;0;-1)$ admettant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$

Déterminer si les points $B(-2;1;7)$ et $C(5;3;0)$ appartiennent à $\wp$.

Exemple 1

a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peuvent pas être colinéaires, car la deuxième coordonnée de $\vec{u}$ est nulle, mais pas celle de $\vec{v}$.

Donc **ces deux vecteurs permettent de définir un plan**.

b. *C'est comme dans l'exemple 2 de la partie 2a.*

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ce vecteur normal, orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

On a $\vec{n}.\vec{u} = 2x + z$

et $\vec{n}.\vec{v} = -4x + 3y + 2z$.

On doit avoir $\begin{cases} 2x + z = 0 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

On peut fixer $x = 1$. Ainsi :

$\begin{cases} 2 + z = 0 \\ -4 + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ -4 + 3y + 2 \times (-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ 3y = 0 \end{cases}$

On a alors $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. On vérifie bien que $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

Ainsi, $\boldsymbol{\vec{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

Exemple 2

Si B et C appartiennent au plan, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs du plan.

D'après la définition du vecteur normal, on devrait alors avoir $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$.

On calcule $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 8 = 23$

et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times 3 + (-1) \times 3 + 3 \times 1 = 0$.

Ainsi, ***C*** **appartient au plan, mais *B* ne lui appartient pas**.

3b. Équation cartésienne d'un plan

Propriété : Soit un plan $\mathcal{P}$ admettant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors il existe un réel d tel que les points appartenant au plan $\mathcal{P}$ vérifient tous l'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Démonstration : Soit $M(x\,;y\,;z)$ appartenant au plan $\wp$.

Alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - y_A) \times c = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$

En prenant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$.

Pour **déterminer l'équation cartésienne** $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ d'un plan, il suffit donc de connaître :

- un **vecteur normal** pour avoir les **valeurs de $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$**,
- un **point appartenant au plan** : on remplace les $x; y; z$ de l'équation par les coordonnées de ce point, et on résout une petite équation pour **trouver $\boldsymbol{d}$**.

Pour **savoir si un point appartient à un plan**, il suffit de **remplacer les $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{z}$** du membre de gauche de l'équation par les coordonnées du point, et de vérifier que **le résultat est $\boldsymbol{0}$**.

Exemple 1 On considère le point $A(-2; 3; 1)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

b. Vérifier ensuite que le point $B(1; 4; 2)$ appartient au plan (P).

Exemple 2 On considère trois points $G(-2; 3; 1)$; $H(-7; 8; 4)$ et $I(0; -2; -2)$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GHI).

b. En déduire l'équation cartésienne du plan (GHI).

Exemple 3 On considère les points $A(1; 1; 4)$; $B(0; 3; 1)$; $C(4; 4; 1)$ et $D(2; 0; -1)$.

a. Vérifier que les points $A; B$ et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le plan (ABC) a pour équation $-3x + 2y - z + 5 = 0$.

c. Démontrer que les points $A; B; C$ et D sont coplanaires.

Exemple 4 Dans chaque cas, déterminer un vecteur normal ainsi qu'un point appartenant au plan.

a. $-2x + y - z + 7 = 0$ **b.** $y = 3x - 5$

Exemple 1 a. D'après la propriété, les coordonnées de $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nous apprennent que l'équation du plan est de la forme :

$-x + 2y + z + d = 0$ avec d réel à déterminer.

Or $A(-2; 3; 1)$ appartient à ce plan, donc en remplaçant x, y et z par les coordonnées de A :

$$-(-2)+2\times 3+1+d=0 \Leftrightarrow 9+d=9 \Leftrightarrow d=-9$$

Ainsi, l'équation du plan est :

$$\boldsymbol{-x+2y+z-9=0}$$

b. On remplace x, y et z par les coordonnées de B :

$$-x+2y+z-9=-1+2\times 4+2-9=0$$

Comme on trouve bien 0, ***B* appartient au plan**.

Exemple 2

a. Calculons $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-7-(-2)\\8-3\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}0-(-2)\\-2-3\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$.

Or $\vec{n}.\overrightarrow{GH}=0\times(-5)+(-3)\times 5+5\times 3=-15+15=0$

et $\vec{n}.\overrightarrow{GI}=0\times 2+(-3)\times(-5)+5\times(-3)=15-15=0$.

$\vec{n}$ est **orthogonal à deux vecteurs définissant le plan** $(\boldsymbol{GHI})$, c'est donc un vecteur normal au plan.

b. L'équation du plan est donc de la forme $\boldsymbol{-3y+5z+d=0}$

Pour déterminer d, utilisons par exemple le point G appartenant à (GHI).

$-3\times 3+5\times 1+d=0 \Leftrightarrow -4+d=0 \Leftrightarrow d=4$.

Ainsi, (GHI) a pour équation $\boldsymbol{-3y+5z+4=0}$.

Exemple 3

a. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\3-1\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-1\\4-1\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ***A*; *B* et *C* ne sont pas alignés**. Ils définissent bien le plan (ABC).

b. *Un plan étant défini par la donnée de trois points, il suffit de vérifier que les trois points* A; B *et* C *satisfont l'équation proposée.*

Si l'équation n'était pas fournie par l'énoncé, ce serait beaucoup plus long : il faudrait trouver nous-mêmes le vecteur normal orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*, ce qui nous permettrait de trouver les réels* a; b; c *de l'équation, puis utiliser un point du plan (*A; B *ou* C*, au choix) afin de trouver le réel* d.

Soit (P) le plan d'équation $-3x+2y-z-5=0$.

- $-3\times 1+2\times 1-4+5=-3+2-4+5=0$, donc $A\in(P)$.
- $-3\times 0+2\times 3-1+5=6-1+5=0$, donc $B\in(P)$.
- $-3\times 4+2\times 4-1+5=-12+8-1+5=0$, donc $C\in(P)$.

Ainsi, **le plan** $(\boldsymbol{ABC})$ **admet bien pour équation** $\boldsymbol{-3x+2y-z-5=0}$.

c. Il suffit de vérifier que le point D appartient aussi au plan (ABC).

$-3\times 2+2\times 0-(-1)+5=-6+1+5=0$

Ainsi, $\boldsymbol{D\in(ABC)}$. Les points A; B; C et D appartiennent au même plan. Ils sont coplanaires.

Exemple 4

a. D'après la propriété, un vecteur normal est $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

Pour trouver un point, on peut tout simplement remplacer deux coordonnées par ce qu'on veut, puis déterminer la troisième coordonnée en utilisant l'équation du plan.
Si on prend $x = 1$ et $y = 1$, on a $-2 \times 1 + 1 - z + 7 = 0$ soit $z = 6$
Le point $\boldsymbol{M}(\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{6})$ appartient au plan.
b. On réécrit l'équation du plan en plaçant tous les termes dans le même membre, comme dans la propriété : $y = 3x - 5 \Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$

D'après la propriété, un vecteur normal est $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

Si on prend $x = 1$, on a $3 \times 1 - y - 5 = 0$ soit $y = -2$
La valeur de z n'a pas d'importance, vu l'équation du plan. On peut choisir ce qu'on veut, j'ai choisi 0.
Le point $\boldsymbol{M}(\mathbf{1}; \mathbf{-2}; \mathbf{0})$ appartient au plan.

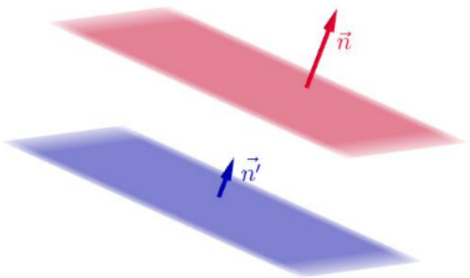
3c. Position relative de deux plans

Propriété :

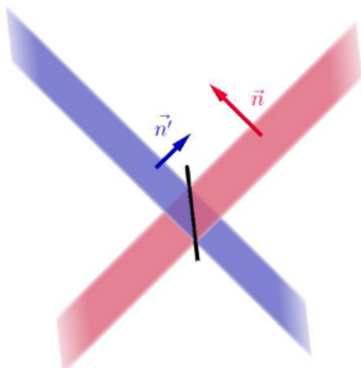
• Deux plans sont parallèles ssi leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
• Si deux plans sont sécants, les vecteurs directeurs de la droite d'intersection sont orthogonaux aux vecteurs normaux des deux plans.
• Deux plans sont orthogonaux ssi leurs vecteurs normaux le sont.

Soient deux plans (P) et (P') admettant pour vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ respectivement.

$(\boldsymbol{P})$ **et** $(\boldsymbol{P'})$ **sont parallèles** si et seulement si $\vec{\boldsymbol{n}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{n'}}$ **sont colinéaires.**



$(\boldsymbol{P})$ **et** $(\boldsymbol{P'})$ **sont orthogonaux** si et seulement si $\vec{\boldsymbol{n}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{n'}}$ **sont orthogonaux.**



Exemple 1 On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - 3z + 3 = 0$
et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que ces plans sont sécants selon la droite (d): $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3k \\ z = k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 Soit (P) le plan d'équation cartésienne $-3x + y + 2z - 7 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (P') parallèle au plan (P) et passant par le point $M(-1; 0; 4)$.

Exemple 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans donnés.

a. $x + y + 2z = 3$ et $x - 4y + 5z = 6$
b. $-x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - y - 2z + 5 = 0$

Exemple 1

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **sécants**.

Vérifions que la droite (d) est incluse dans $\mathcal{P}$. *Pour cela, il faut montrer que tout point de* (d) *appartient à* $\mathcal{P}$*, avec presque la même méthode qu'en partie 3b.*

Pour tout $M(x; y; z)$ point appartenant à (d), il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

• $x + y - 3z + 3 = -2 + (-1 + 3k) - 3k + 3 = -2 - 1 + 3x - 3k + 3 = 0$

Donc (d) est incluse dans $\mathcal{P}$, et :

• $x - 2y + 6z = -2 - 2(-1 + 3k) + 6k = -2 + 2 - 6k + 6k = 0$

Donc (d) est incluse dans $\mathcal{P}'$.

En conclusion, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont bien **sécants selon la droite** $(\boldsymbol{d})$.

Exemple 2 (P) admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Le plan (P') étant parallèle à (P). Donc tout vecteur normal à (P) est également normal à (P'). On peut reprendre $\vec{n}$ comme vecteur normal à (P').
(P') admet donc une équation de la forme $-3x+y+2z+d=0$.
Or $M(-1;0;4)$ appartient à (P'), donc $-3\times(-1)+0+2\times 4+d=0$
soit $11+d=0 \Leftrightarrow d=-11$.
Ainsi, (P') admet pour équation cartésienne $\boldsymbol{-3x+y+2z-11=0}$.

Exemple 3 a. Les vecteurs normaux sont, respectivement, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires, donc les plans sont bien sécants. On cherche leur droite d'intersection. *Ici, elle n'est pas fournie comme dans l'exemple 1, c'est donc beaucoup plus difficile.*
Les coordonnées des points de la droite doivent satisfaire le système :
$\begin{cases} x+y+2z-3=0\\ x-4y+5z-6=0\end{cases}$
Remarque importante : on cherche à déterminer la représentation paramétrique d'une droite, qui dépend donc d'un paramètre t.
On peut alors décider qu'une des coordonnées (la plus simple à isoler) est égale à ce paramètre, et déterminer les deux autres coordonnées en fonction de ce t.
Soit $t=x$. On a alors :
$\begin{cases} t+y+2z-3=0\\ t-4y+5z-6=0\end{cases}$
La première équation devient $y=-2z+3-t$.Dans la deuxième équation, on remplace y : $t-4(-2z+3-t)+5z-6=0$
$\Leftrightarrow t+8z-12+4t+5z-6=0$
$\Leftrightarrow 5t+13z-18=0$
$\Leftrightarrow z=-\dfrac{5}{13}t+\dfrac{18}{13}$
On trouve ensuite :
$y=-2\left(-\dfrac{5}{13}t+\dfrac{18}{13}\right)+3-t=-\dfrac{3}{13}t+\dfrac{3}{13}$
On aboutit au système : $\begin{cases}\boldsymbol{x=t}\\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{13}t+\frac{3}{13}}\\ \boldsymbol{z=-\frac{5}{13}t+\frac{18}{13}}\end{cases}$
Évidemment, plusieurs réponses sont possible, on aurait pu choisir de fixer y *ou* z.

b. Les vecteurs normaux sont, respectivement, $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont opposés, donc colinéaires. Ainsi, les plans considérés sont **parallèles**.

3d. Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété :

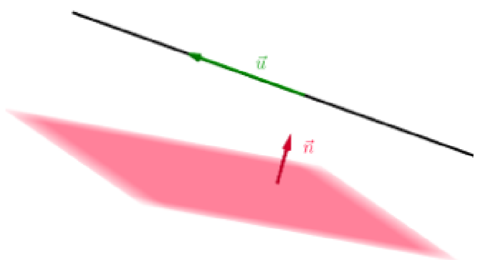
• Une droite et un plan sont parallèles ssi un vecteur normal du plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite.

• Dans le cas contraire, la droite et le plan sont sécants, et on peut chercher leur point d'intersection.

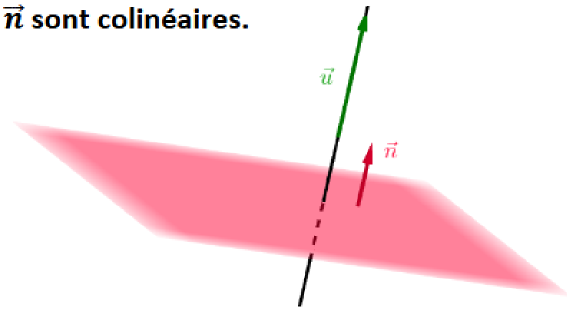
• Une droite et un plan sont orthogonaux ssi un vecteur normal du plan est colinéaire à un vecteur directeur de la droite.

Soient une droite (d) dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) admettant un vecteur normal $\vec{n}$.

(d) et (P) sont parallèles si et seulement si **$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.**



(d) et (P) sont orthogonaux si et seulement si **$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.**



Exemple 1 On considère la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 4k \\ z = -2 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

et le plan $\wp$ d'équation cartésienne $3x - y + 2z - 3 = 0$.

a. Justifier que la droite et le plan sont sécants.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exemple 2 Même question avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 2z = 0$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ où t est un réel.

Exemple 3 Déterminer la position relative de la droite (d) : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -3t \\ z = t + 4 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$,

et du plan (P) d'équation cartésienne $-5x + y - 2z + 8 = 0$.

Exemple 1

a. La droite est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u}.\vec{n} = -2 \times 3 + 4 \times (-1) + 1 \times 2 = -8$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux.

Par conséquent, **la droite (d) n'est pas parallèle au plan $\wp$: ils sont sécants**.

b. Soit $M(x\,;y\,;z)$ le point d'intersection.

M appartient à la droite (d) : il existe alors un paramètre k tel que $x = 1 - 2k$, $y = 4k$ et $z = -2 + k$.

De plus, M appartient au plan $\wp$: ses coordonnées vérifient l'équation $3x - y + 2z - 3 = 0$.

En combinant ces informations, on trouve :
$3(1-2k)-4k+2(-2+k)-3=0$
soit $3-6k-4k-4+2k-3=0 \Leftrightarrow -8k-4=0 \Leftrightarrow k=-0{,}5$
La droite (d) et le plan $\wp$ se coupent au point de (d) de paramètre $-0{,}5$,
soit $M\left(1-2\times(-0{,}5)\,;4\times(-0{,}5)\,;-2-0{,}5\right)$
donc $\boldsymbol{M}\left(\mathbf{2}\,;-\mathbf{2}\,;-\mathbf{2{,}5}\right)$.

Exemple 2

La droite est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
On a $\vec{u}.\vec{n}=-1$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux.
Par conséquent, la droite n'est pas parallèle au plan : ils sont **sécants**.
Soit $M\left(x\,;y\,;z\right)$ le point d'intersection.
M appartient à la droite, et satisfait l'équation du plan : il existe alors un paramètre t tel que $x+y-2z=0$ soit :

$$(2+2t)+(1-t)-2t=0$$
$$\Leftrightarrow -t+3=0$$
$$\Leftrightarrow t=3$$

Ainsi, la droite et le plan se coupent au point de la droite de paramètre 3,
soit $M(2+2\times 3; 1-3; 3)$
donc $\boldsymbol{M}(\mathbf{8}; -\mathbf{2}; \mathbf{3})$.

Exemple 3

La droite est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\1\\-2\end{pmatrix}$
Or $\vec{u}.\vec{n}=-1\times(-5)+(-3)\times 1+1\times(-2)=5-3-2=0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. **La droite $(\boldsymbol{d})$ et le plan $(\boldsymbol{P})$ sont parallèles**.

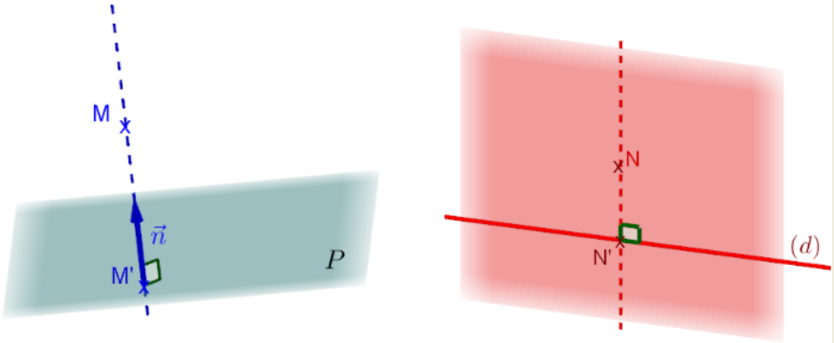
4. Projeté orthogonal

4a. Définition

Le projeté orthogonal d'un point sur une droite (ou un plan) est le point d'intersection de la droite (ou du plan) et de la droite perpendiculaire à cette droite (ou à ce plan) passant par le point donné.

Dans la figure ci-contre :

- le point M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\wp$ de vecteur normal $\vec{n}$
- le point N' est le projeté orthogonal du point N sur la droite (d), dans le plan comprenant le point N et la droite (d).



Exemple 1 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(1; 2; -1)$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Exemple 2 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $B(3; 1; -1)$ sur la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -2k \end{cases}$, pour $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 1 Soit (d) la droite passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Elle est donc dirigée par un vecteur normal à $(\mathcal{P})$, par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, (d) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminons le point d'intersection de cette droite (d) avec le plan $(\mathcal{P})$: soit $H(x\,;y\,;z)$ ce point d'intersection. H *est le projeté orthogonal que l'on recherche.*

Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que : $2x - 3y + z - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) + (-1 + t) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 + 4t - 6 + 9t - 1 + t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 14t - 6 = 0 \;\Leftrightarrow t = \frac{3}{7}$$

Ainsi, H est le point de (d) de paramètre $\frac{3}{7}$: $\begin{cases} x = 1 + 2 \times \frac{3}{7} = \frac{13}{7} \\ y = 2 - 3 \times \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \\ z = -1 + \frac{3}{7} = -\frac{4}{7} \end{cases}$

Donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$ est le point $\boldsymbol{H\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}; -\frac{4}{7}\right)}$

Exemple 2 *Le projeté orthogonal d'un point sur une droite est une question bien plus rare : la plupart des exercices du Bac ressemblent plutôt à l'exemple 1.*

Soit $H(x\,;y\,;z)$ le projeté orthogonal du point B sur la droite (d).

H appartient alors à (d) : il existe alors $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -2k \end{cases}$

De plus, le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs de (d).

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d).

On peut aussi calculer $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 3-(2+2k) \\ 1-(-1+k) \\ -1-(-2k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2k \\ 2-k \\ -1+2k \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs étant orthogonaux, on a alors :

$\overrightarrow{HB}.\vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow (1-2k)\times 2 + (2-k)\times 1 + (-1+2k)\times(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 4k + 2 - k + 2 - 4k = 0$

$\Leftrightarrow 6 - 9k = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Ainsi, H est le point de (d) de paramètre $\frac{2}{3}$: $\begin{cases} x = 2 + 2\times\frac{2}{3} = \frac{10}{3} \\ y = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \\ z = -2\times\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \end{cases}$

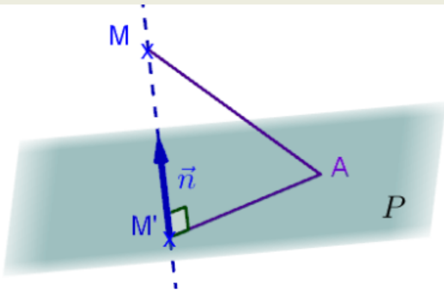
Donc le projeté orthogonal du point B sur la droite (d) est $\boldsymbol{H\left(\frac{10}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{4}{3}\right)}$

4b. Distance d'un point à un plan

Propriété : Soient un point M et un plan $\mathcal{P}$.
On appelle distance de M à $\mathcal{P}$, la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
C'est la plus courte distance entre le point M et un point du plan $\mathcal{P}$.

Dans l'exemple précédent, soit un autre point A du plan P ci-contre.

Le triangle $MM'A$ est alors un triangle rectangle dont $[MA]$ est l'hypoténuse.
La distance MA est donc supérieure à la distance MM'.
Cela prouve que la distance entre M et son projeté orthogonal correspond bien au « chemin le plus court » du point M au plan P.



Exemple Déterminer la distance du point $A(2; 1; 3)$ au plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $x - 3y + 2z - 1 = 0$.
Donner la valeur exacte simplifiée, puis un arrondi au centième.

Soit (d) la droite passant par $A(2\,; 1; 3)$ et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Elle est donc dirigée par un vecteur normal à $(\mathcal{P})$, par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Ainsi, (d) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 2 + t\\ y = 1 - 3t\\ z = 3 + 2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Déterminons le point d'intersection de cette droite (d) avec le plan $(\mathcal{P})$: soit $H(x\,; y\,; z)$ ce point d'intersection. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $x - 3y + 2z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2 + t) - 3(1 - 3t) + 2(3 + 2t) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + t - 3 + 9t + 6 + 4t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 14t + 4 = 0 \;\Leftrightarrow t = -\dfrac{2}{7}$

Ainsi, H est le point de (d) de paramètre $\dfrac{2}{7}$: $\begin{cases}x = 2 + \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{12}{7}\\ y = 1 - 3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{13}{7}\\ z = 3 + 2 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{17}{7}\end{cases}$

Donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$ est le point $H\left(\frac{12}{7}; \frac{13}{7}; \frac{17}{7}\right)$

Ainsi, la distance du point A au point H est la distance AH.

$$AH = \sqrt{\left(\frac{12}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{13}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{17}{7} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{36}{49} + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{56}{49}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{8}{7}}} \approx \mathbf{1,07}$$